Q12 * Mathematematik m1 * Kurzarbeit am 11.04.2018 * Gruppe A

1. Gegeben sind die Punkte A(4/1/1) und B(5/5/12) und die Gerade g mit

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

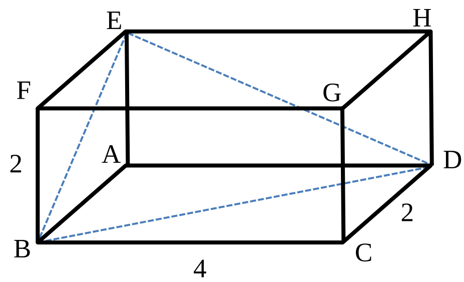
a) Die Gerade g und der Punkt A legen eine Ebene E fest.
Bestimmen Sie eine Koordinatenform dieser Ebene E.
[Mögliches Ergebnis: $2x_1 - x_2 + 4x_3 - 11 = 0$]

b) Die Gerade h ist die senkrechte Projektion der Geraden AB auf die Ebene E.
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Geraden h.

[Mögliches Ergebnis $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$]

c) Die Geraden h und g schneiden sich im Punkt S.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S und bestimmen Sie auch den Schnittwinkel der Geraden h und g auf $0{,}1^\circ$ genau.

2. Ein Quader ABCDEFGH (siehe Bild) hat die Kantenlängen $\overline{AB} = 2$, $\overline{AD} = 4$ und $\overline{AE} = 2$.
Die Punkte B, D und E legen eine Ebene F fest.



a) Skizzieren Sie ein geeignetes Koordinatensystem und bestimmen Sie in diesem Koordinatensystem eine Gleichung für diese Ebene F.

b) Die Kugel mit Mittelpunkt G und Radius r = 3 schneidet die Ebene F in einem Kreis mit Radius ρ.
Berechnen Sie ρ.

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	Summe
Punkte	4	5	5	4	4	22

Gutes Gelingen! G.R.

Q12 * Mathematik m1 * Kurzarbeit am 11.04.2018 * Gruppe B

1. Gegeben sind die Punkte A(1/4/1) und B(5/5/12) und die Gerade g mit

$$g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

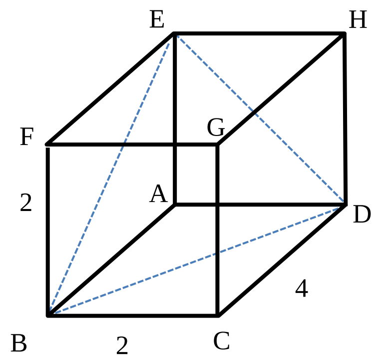
a) Die Gerade g und der Punkt A legen eine Ebene E fest.
Bestimmen Sie eine Koordinatenform dieser Ebene E.
[Mögliches Ergebnis: $-x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 11 = 0$]

b) Die Gerade h ist die senkrechte Projektion der Geraden AB auf die Ebene E.
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Geraden h.

[Mögliches Ergebnis $h:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$]

c) Die Geraden h und g schneiden sich im Punkt S.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S und bestimmen Sie auch den Schnittwinkel der Geraden h und g auf $0{,}1^{\circ}$ genau.

2. Ein Quader ABCDEFGH (siehe Bild) hat die Kantenlängen $\overline{AB} = 2$, $\overline{AD} = 2$ und $\overline{AE} = 4$.
Die Punkte B, D und E legen eine Ebene F fest.



a) Skizzieren Sie ein geeignetes Koordinatensystem und bestimmen Sie in diesem Koordinatensystem eine Gleichung für diese Ebene F.

b) Die Kugel mit Mittelpunkt G und Radius r = 3 schneidet die Ebene F in einem Kreis mit Radius ρ.
Berechnen Sie ρ.

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	Summe
Punkte	4	5	5	4	4	22

Gutes Gelingen! G.R.

Q12 * Mathematik m1 * Kurzarbeit am 11.04.2018 * Lösung * Gruppe A

1. a) Richtungsvektoren zur Ebene: $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 1-(-1) \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } E: \left(\vec{X}-\vec{A}\right) \circ \overrightarrow{n_E} = 0 \Leftrightarrow 2x_1 - x_2 + 4x_3 - (8-1+4) = 0$$

also $E:\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 11 = 0$

b) Lot ℓ von B auf Ebene E: $\ell:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Fußpunkt F des Lots: $\{F\} = \ell \cap E$; ℓ in E eingesetzt:

$2 \cdot (5+2s) - (5-s) + 4 \cdot (12+4s) - 11 = 0 \Leftrightarrow 21s + 42 = 0 \Leftrightarrow s = -2$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow F(1/7/4) \text{ und } h: \vec{X} = \vec{A} + r' \cdot \overrightarrow{AF} = \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r' \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

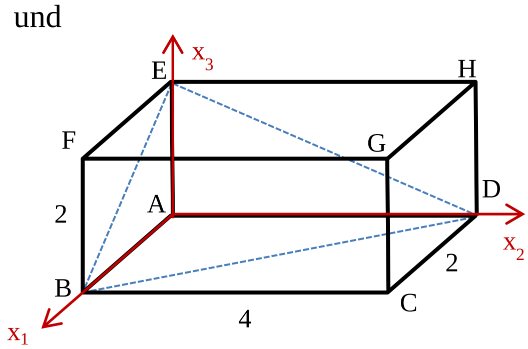
c) $\{S\} = g \cap h:$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 4 - r \Rightarrow r = 1 \\ -1 + 4t = 1 + 2r \Rightarrow 4t = 4 \Rightarrow t = 1 \\ 1 + t = 1 + r \quad \text{Probe: } 1+t = 2 \,;\, 1+r = 2 \end{cases}$$

also $S(4-1/1+2/1+1) = (3/3/2)$

Schnittwinkel φ: $$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{16+1} \cdot \sqrt{1+4+1}} = \frac{8+1}{\sqrt{17 \cdot 6}} = \frac{9}{\sqrt{17 \cdot 6}} \Rightarrow \varphi = 26{,}98...^\circ \approx 27{,}0^\circ$$

2. a) Wähle A(0/0/0) als Ursprung des Koordinatensystems und damit B(2/0/0), D(0/4/0), E(0/0/2) und G(2/4/2). Achsenabschnittsform der Ebene F:



$$F: \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} = 1 \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \text{ und}$$

$$F_{HNF}: \frac{1}{\sqrt{4+1+4}} \cdot (2x_1 + x_2 + 2x_3 - 4) = 0 \text{ also}$$

$$F_{HNF}: \frac{1}{3} \cdot (2x_1 + x_2 + 2x_3 - 4) = 0$$

b) $d(G;F) = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 2 + 4 + 2 \cdot 2 - 4) = \frac{8}{3}$ und $d^2 + \rho^2 = r^2 \Rightarrow$

$$\rho^2 = r^2 - d^2 = 9 - \frac{64}{9} = \frac{17}{9} \text{ also } \rho = \sqrt{\frac{17}{9}} = \frac{\sqrt{17}}{3} \approx 1{,}37$$

Q12 * Mathematik m1 * Kurzarbeit am 11.04.2018 * Lösung * Gruppe B

1. a) Richtungsvektoren zur Ebene: $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 4-3 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{n_E} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } E: \left(\vec{X}-\vec{A}\right) \circ \vec{n_E} = 0 \Leftrightarrow -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - (-1+8+4) = 0$$

also $E:\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 11 = 0$

b) Lot ℓ von B auf Ebene E: $\ell:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Fußpunkt F des Lots: $\{F\} = \ell \cap E$; ℓ in E eingesetzt:

$-(5-s) + 2\cdot(5+2s) + 4\cdot(12+4s) - 11 = 0 \Leftrightarrow 21s + 42 = 0 \Leftrightarrow s = -2$

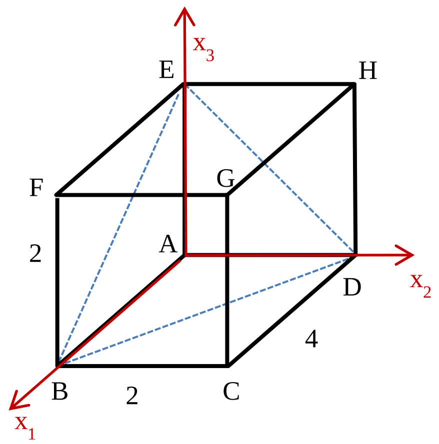
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow F(7/1/4) \text{ und } h: \vec{X} = \vec{A} + r' \cdot \overrightarrow{AF} = \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r' \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) $$\{S\} = g \cap h:\quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -1+4t = 1+2r \Rightarrow 4t = 4 \Rightarrow t = 1 \\ 3 = 4 - r \Rightarrow r = 1 \\ 1+t = 1+r \quad \text{Probe: } 1+t = 2\,;\, 1+r = 2 \end{array}\right.$$

also $S(1+2/4-1/1+1) = (3/3/2)$

$$\text{Schnittwinkel } \varphi:\quad \cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{16+1}\cdot\sqrt{4+1+1}} = \frac{8+1}{\sqrt{17\cdot 6}} = \frac{9}{\sqrt{17\cdot 6}} \Rightarrow \varphi = 26{,}98...^\circ \approx 27{,}0^\circ$$

2. a) Wähle A(0/0/0) als Ursprung des Koordinatensystems und damit B(4/0/0), D(0/2/0), E(0/0/2) und G(4/2/2).
Achsenabschnittsform der Ebene F:



$F:\ \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} = 1 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$ und

$F_{HNF}:\ \frac{1}{\sqrt{4+1+4}}\cdot(x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$ also

$F_{HNF}:\ \frac{1}{3}\cdot(x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$

b) $d(G;F) = \frac{1}{3}\cdot(4 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2 - 4) = \frac{8}{3}$ und $d^2 + \rho^2 = r^2 \Rightarrow$

$\rho^2 = r^2 - d^2 = 9 - \frac{64}{9} = \frac{17}{9}$ also $\rho = \sqrt{\frac{17}{9}} = \frac{\sqrt{17}}{3} \approx 1{,}37$