Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Integralrechnung

1. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

a) $\int_1^3 0{,}5x + 2 \, dx$ b) $\int_3^1 2 + 0{,}5x \, dx$

c) $\int_0^4 x^2 + 2x \, dx$ d) $\int_1^2 5 - \frac{2}{x^2} \, dx$

e) $\int_0^3 \sqrt{x} \, dx$ f) $\int_1^2 (x^2 + 1) \cdot \sqrt{x} \, dx$

2. Bestimmen Sie die beiden folgenden Integralfunktionen:

$I_1(x) = \int_1^x t^2 - 2 \, dt$ und $I_{-1}(x) = \int_{-1}^x t^2 - 2 \, dt$

3. Vorsicht! Was halten Sie von folgenden Integralen?

$\int_{-1}^{-2} \frac{3}{x^2} \, dx$ bzw. $\int_{-1}^{2} \frac{3}{x^2} \, dx$ bzw. $\int_{1}^{2} \frac{3}{x^2} \, dx$

4. Bestimmen Sie den Wert von k so, dass die Gleichung erfüllt ist.
Deuten Sie das Ergebnis jeweils geometrisch!

a) $\int_{-k}^{k} 1 - x^2 \, dx = 0$ b) $\int_{-k}^{k} 1 - x^2 \, dx = \frac{4}{3}$

5. Für Experten zum Tüfteln:
Berechnen Sie das bestimmte Integral. Denken Sie dabei an den HDI.

a) $\int_0^3 \sqrt{2x+3} \, dx$ b) $\int_0^3 6x \cdot \sqrt{x^2+3} \, dx$

Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Integralrechnung * Lösungen

1. a) $\displaystyle\int_1^3 0,5x + 2\,dx = \left[\frac{0,5\cdot x^2}{2} + 2x\right]_1^3 = \left(\frac{9}{4} + 6\right) - \left(\frac{1}{4} + 2\right) = 6$

   b) $\displaystyle\int_3^1 0,5x + 2\,dx = \left[\frac{0,5\cdot x^2}{2} + 2x\right]_3^1 = \left(\frac{1}{4} + 2\right) - \left(\frac{9}{4} + 6\right) = -6$

   c) $\displaystyle\int_0^4 x^2 + 2x\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^4 = \frac{64}{3} + 16 - 0 = \frac{112}{3} = 37\frac{1}{3}$

   d) $\displaystyle\int_1^2 5 - \frac{2}{x^2}\,dx = \left[5x + \frac{2}{x}\right]_1^2 = (10 + \frac{2}{2}) - (5+2) = 4$

   e) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{27} - 0 = 2\cdot\sqrt{3}$

   f) $\displaystyle\int_1^2 (x^2+1)\cdot\sqrt{x}\,dx = \int_1^2 x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{7}\cdot x^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 =$

   $\displaystyle(\frac{16\sqrt{2}}{7} + \frac{4\sqrt{2}}{3}) - (\frac{2}{7} + \frac{2}{3}) = \frac{76\sqrt{2} - 20}{21}$

2. $\displaystyle I_1(x) = \int_1^x t^2 - 2\,dt = \left[\frac{t^3}{3} - 2t\right]_1^x = \frac{x^3}{3} - 2x - (\frac{1}{3} - 2) = \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{5}{3}$

   $\displaystyle I_{-1}(x) = \int_{-1}^x t^2 - 2\,dt = \left[\frac{t^3}{3} - 2t\right]_{-1}^x = \frac{x^3}{3} - 2x - (-\frac{1}{3} + 2) = \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{5}{3}$

3. $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{3}{x^2}\,dx$ existiert nicht,

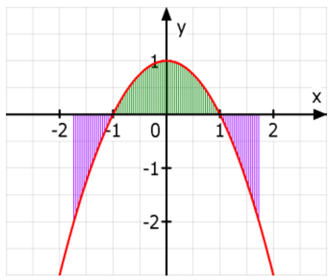
   denn man kann nicht über die Definitionslücke bei $x_1 = 0$ hinweg integrieren!

   $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \frac{3}{x^2}\,dx = \left[-\frac{3}{x}\right]_{-1}^{-2} = \frac{3}{2} - 3 = -1,5$ und $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{x^2}\,dx = \left[-\frac{3}{x}\right]_1^2 = -\frac{3}{2} + 3 = 1,5$

4. a) $$\int_{-k}^{k} 1 - x^2\ dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-k}^{k} = \frac{2k\cdot(3-k^2)}{3} \quad \text{d.h.}$$

$$\int_{-k}^{k} 1 - x^2\ dx = 0 \Leftrightarrow \frac{2k\cdot(3-k^2)}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$k_1 = 0 \quad \text{oder} \quad k_{2/3} = \pm\sqrt{3}$$



Lila und grün gefärbte Flächen haben gleichen Inhalt!

b) $$\int_{-k}^{k} 1 - x^2\ dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-k}^{k} = \frac{2k\cdot(3-k^2)}{3} \quad \text{d.h.}$$

$$\int_{-k}^{k} 1 - x^2\ dx = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{2k\cdot(3-k^2)}{3} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

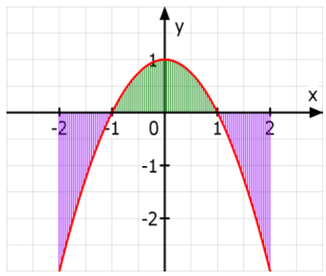
$$k\cdot(3-k^2) = 2 \Leftrightarrow k^3 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

durch Faktorisieren: $k^3 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow$

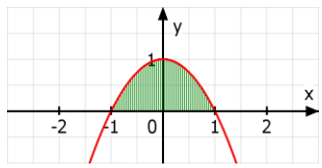
$$(k-1)\cdot(k^2 + k - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$k_1 = 1 \quad \text{oder} \quad k_{2/3} = \frac{1}{2}\cdot\left(-1 \pm \sqrt{1^2 + 8}\right) = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \quad \text{d.h.}$$

$$k_2 = -2 \quad \text{und} \quad k_3 = k_1 = 1$$



Lila Fläche um 4/3 größer als grüne!



Grüne Fläche hat den Inhalt 4/3.

5. Beide Stammfunktionen findet man durch Probieren!

a) $$\int_{0}^{3} \sqrt{2x+3}\ dx = \left[\frac{1}{3}\cdot(2x+3)^{\frac{3}{2}} \right]_{0}^{3} = 9 - \sqrt{3}$$

b) $$\int_{0}^{3} 6x\cdot\sqrt{x^2+3}\ dx = \left[2\cdot\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}} \right]_{0}^{3} = 2\cdot 12\cdot\sqrt{12} - 2\cdot 3\cdot\sqrt{3} = 42\cdot\sqrt{3}$$