Q12 * Mathematik * Aufgaben zur linearen Abhängigkeit von Vektoren

1. Prüfen Sie jeweils, ob die drei Vektoren linear unabhängig sind.
   Bestimmen Sie dann - falls möglich - den Vektor $\vec{v}$ als Linearkombination dieser drei Vektoren.

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Bestimmen Sie k jeweils so, dass die drei Vektoren linear abhängig sind.

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ k+1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ k \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

3. Prüfen Sie jeweils, ob die Punkte A, B und C eine Ebene aufspannen.
   a) A(-1/5/1), B(2/2/7) und C(3/1/9)
   b) A(-1/5/1), B(2/2/7) und C(3/1/5)

4. a) Begründen Sie, dass der Punkt P(1/2/3) nicht auf der durch die Punkte A(2/4/1) und B(3/1/4) festgelegten Geraden AB liegt.
   b) Begründen Sie, dass der Punkt R(5/-5/10) auf der durch die Punkte A(2/4/1) und B(3/1/4) festgelegten Geraden AB liegt.

5. Begründen Sie, dass die Punkte A, B und C eine Ebene aufspannen.
   Prüfen Sie dann, ob die Punkte S und T in dieser Ebene liegen!
   a) A(-2/0/5), B(-1/-2/2) und C(3/4/1)
      S(1/8/7), T(2/0/1)
   b) A(1/1/2), B(2/3/-1) und C(-2/2/4)
      S(-2/9/-3), T(3/1/3)

Q12 * Mathematik * Aufgaben zur linearen Abhängigkeit von Vektoren * Lösungen

1. a) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig und $\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$
   b) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig und $\vec{v}$ lässt sich nicht als Linearkombination darstellen.
   c) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig und $\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$

2. a) Die drei Vektoren sind linear abhängig für $k_1 = 2$ und $k_2 = 7$
   b) Die drei Vektoren sind linear abhängig für $k_1 = 1$ und $k_2 = -3\frac{3}{7}$.

3. a) $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind linear abhängig, daher spannen A, B und C keine Ebene auf.
   b) $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind linear unabhängig, daher spannen A, B und C eine Ebene auf.

4. a) $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AP}$ sind linear unabhängig, daher liegt P nicht auf AB.
   b) $\overrightarrow{AR}$ und $\overrightarrow{AB}$ sind linear abhängig ($\overrightarrow{AR} = 3 \cdot \overrightarrow{AB}$), daher liegt R auf AB.

5. a) $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind linear unabhängig, daher spannen A, B und C eine Ebene auf.
   S liegt in dieser Ebene, denn $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$.
   T liegt nicht in dieser Ebene, denn $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind linear unabhängig.
   b) $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind linear unabhängig, daher spannen A, B und C eine Ebene auf.
   S liegt in dieser Ebene, denn $\overrightarrow{AS} = 3 \cdot \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{AC}$.
   T liegt nicht in dieser Ebene, denn $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind linear unabhängig.