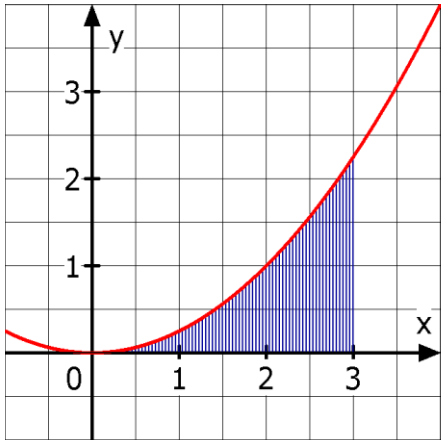
Q12 * Mathematik * Zwei Beispiele zur Streifenmethode

1. Der Inhalt der schraffierten Fläche soll mit der Streifenmethode ermittelt werden.



Es gilt $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2$.

[Hinweis: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$]

Lösung:
Bestimme zuerst Δx und x_i :

$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$ und $x_o = 0$; $x_n = 3$;

$x_i = x_o + i \cdot \Delta x = 0 + i \cdot \frac{3}{n}$; also $x_i = i \cdot \frac{3}{n}$

Hier ist die Obersumme "einfacher" zu berechnen:

$$O_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + ... + \Delta x \cdot f(x_n) = \Delta x \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot x_1{}^2 + \frac{1}{4} \cdot x_2{}^2 + ... + \frac{1}{4} \cdot x_n{}^2 \right) =$$

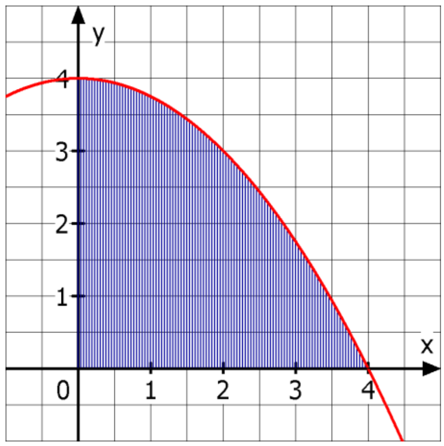
$$= \frac{3}{n} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left((1 \cdot \frac{3}{n})^2 + (2 \cdot \frac{3}{n})^2 + ... + (n \cdot \frac{3}{n})^2 \right) = \frac{3}{n} \cdot \frac{1}{4} \cdot (\frac{3}{n})^2 \cdot \left(1^2 + 2^2 + ... + n^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (\frac{3}{n})^3 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{9}{8} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{n^3} = \frac{9}{8} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3}$$

mit $\lim\limits_{n \to \infty} O_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{9}{8} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{9}{8} \cdot \frac{2n^3}{n^3} = \frac{9 \cdot 2}{8} = \frac{9}{4}$ folgt also $A = \frac{9}{4}$.

Zum Vergleich: $\int_0^3 \frac{1}{4} \cdot x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{12} \right]_0^3 = \frac{27}{12} - 0 = \frac{9}{4}$

2. Auch diese schraffierte Fläche soll mit der Streifenmethode ermittelt werden.



Es gilt $f(x) = 4 - \frac{1}{4} \cdot x^2$.

$\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$ und $x_o = 0$; $x_n = 4$;

$x_i = x_o + i \cdot \Delta x = 0 + i \cdot \frac{4}{n}$; also $x_i = i \cdot \frac{4}{n}$

Hier ist die Untersumme "einfacher" zu berechnen:

$$U_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + ... + \Delta x \cdot f(x_n) =$$

$$\Delta x \cdot \left((4 - \frac{1}{4} \cdot x_1{}^2) + (4 - \frac{1}{4} \cdot x_2{}^2) + ... + (4 - \frac{1}{4} \cdot x_n{}^2) \right) = \frac{4}{n} \cdot \left(n \cdot 4 - \frac{1}{4} \cdot (x_1{}^2 + x_2{}^2 + ... + x_n{}^2) \right) =$$

$$\frac{4}{n} \cdot n \cdot 4 - \frac{4}{n} \cdot \frac{1}{4} \cdot (x_1{}^2 + x_2{}^2 + ... + x_n{}^2) = 16 - \frac{1}{n} \cdot \left((1 \cdot \frac{4}{n})^2 + (2 \cdot \frac{4}{n})^2 + ... + (n \cdot \frac{4}{n})^2 \right) =$$

$$= 16 - \frac{1}{n} \cdot \frac{4^2}{n^2} \cdot (1^2 + 2^2 + ... + n^2) = 16 - \frac{16}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = 16 - \frac{8}{3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3}$$

mit $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = \lim\limits_{n \to \infty} (16 - \frac{8}{3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3}) = \lim\limits_{n \to \infty} (16 - \frac{8}{3} \cdot \frac{2n^3}{n^3}) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$ folgt also $A = \frac{32}{3}$.

Zum Vergleich: $\int_0^4 4 - \frac{1}{4} \cdot x^2 \, dx = \left[4x - \frac{x^3}{12} \right]_0^4 = 16 - \frac{64}{12} = \frac{32}{3}$