# Q12 * Mathematik * Normalenform von Ebenen im $R^3$

1. Wandeln Sie von der Parameterform in die Normalenform der Ebene um!

a) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $E: \vec{X} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Wandeln Sie von der Normalenform in eine Parameterform der Ebene um!

a) $E: 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$

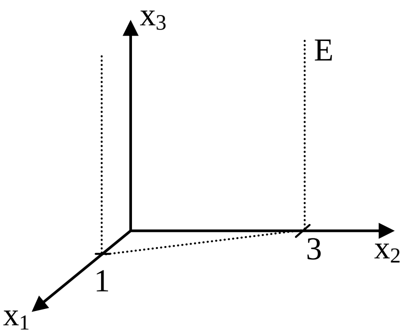
b) $E: -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$

c) $E: 3x_1 + 4x_3 = 5$

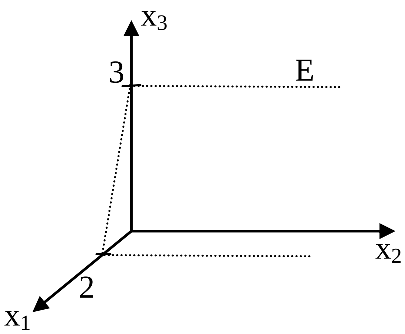
d) $E: 2x_2 = 3$

3. Im Bild ist eine Ebene E dargestellt.
Geben Sie E jeweils in Parameter- sowie in Normalenform an!

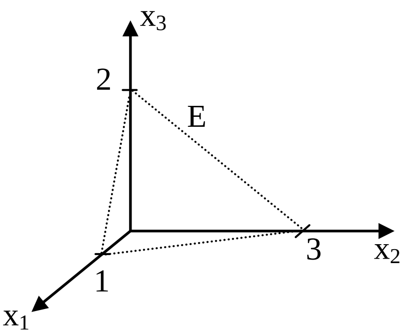
a)



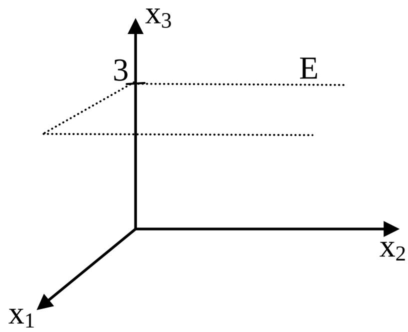

b)




c)




d)




4. Geben Sie die Ebene jeweils in Parameter- sowie in Normalenform an!

a) $x_1$-$x_2$ – Ebene

b) $x_1$-$x_3$ – Ebene

5. Begründen Sie, dass es für eine Gerade im $R^3$ keine Normalenform geben kann.
In welchen Räumen gibt es für Geraden eine Normalenform?

**Q12 * Mathematik * Normalenform von Ebenen im $R^3$ * Lösungen**

1. a) $E: -6x_1 + x_2 + 4x_3 = 6$ b) $E: 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -3$

   c) $E: 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$ d) $E: 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 7$

2. a) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

   c) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ d) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. a) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E: 3x_1 + x_2 = 3$

   b) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $E: 3x_1 + 2x_3 = 6$

   c) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $E: 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

   d) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E: x_3 = 3$

4. a) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E: x_3 = 0$

   b) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E: x_2 = 0$

5. Im $R^3$ gibt es zu einer Geraden viele senkrechte Einheitsvektoren.
   Im $R^2$ gibt es eine Normalenform der Geraden.

   Beispiel: $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 4x_1 - 3x_2 = -2$

   Umrechnung von g in die Normalenform:

   Wähle $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \vec{n} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ; $0 = \left( \vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \circ \vec{n} = \left( \vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 4x_1 - 3x_2 + 2 = 0$

   oder $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \quad x_1 = 1 + 3r \\ (2) \quad x_2 = 2 + 4r \quad \Rightarrow \quad r = 0{,}25x_2 - 0{,}5 \quad \text{in (1)} \end{cases}$

   $x_1 = 1 + 3 \cdot (\frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{2}) \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x_1 - 3x_2 = -2$