

Q12 * Mathematik * Integralrechnungen



1. Geben Sie jeweils genau an, was das „Integral“ bedeutet.
Benennen und bestimmen Sie dieses Integral.

a) $\int 3x^2 - 2 \, dx$ b) $\int_{-1}^{+1} 3x^2 - 2 \, dx$ c) $\int_1^x 3t^2 - 2 \, dt$

2. Berechne das bestimmte Integral.

a) $\int_1^3 x^2 - x \, dx$ b) $\int_1^2 3x^2 - \frac{2}{x^2} \, dx$ c) $\int_1^4 3 \cdot \sqrt{x} + 1 \, dx$

d) $\int_0^4 \sqrt{2x+1} \, dx$ e) $\int_1^e \frac{3}{2x} \, dx$ f) $\int_1^2 \frac{2x}{1+x^2} \, dx$

g) $\int_0^3 \frac{3x}{1+x^2} \, dx$ h) $\int_{-1}^{+1} 2e^x \, dx$ i) $\int_0^2 2e^{0,5x} \, dx$

j) $\int_0^2 3e^{-x} \, dx$ k) $\int_0^1 2xe^{x^2} \, dx$ l) $\int_0^\pi 2\cos x \, dx$

m) $\int_0^\pi \cos \frac{x}{2} \, dx$ n) $\int_0^{\pi/4} \sin 2x \, dx$ o) $\int_0^{0,5} 2 \cdot \sin(\pi \cdot x) \, dx$



Q12 * Mathematik * Integralrechnungen * Lösungen

1. a) Das unbestimmte Integral gibt die Menge aller Stammfunktionen zu $f(x) = 3x^2 - 2$ an.

$$\int 3x^2 - 2 \, dx = x^3 - 2x + C$$

b) Das bestimmte Integral gibt die Flächenbilanz an und ist so ein konkreter Zahlenwert.

$$\int_{-1}^{+1} 3x^2 - 2 \, dx = \left[x^3 - 2x \right]_{-1}^{+1} = (1-2) - (-1-(-2)) = -1 - (+1) = -2$$

c) Die so genannte Integralfunktion ist eine Funktion der oberen Grenze x .

$$\int_1^x 3t^2 - 2 \, dt = \left[t^3 - 2t \right]_1^x = x^3 - 2x - (1-2) = x^3 - 2x + 1$$



2. Berechne das bestimmte Integral.

$$a) \int_1^3 x^2 - x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^3 = \left(9 - \frac{9}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = 4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

$$b) \int_1^2 3x^2 - \frac{2}{x^2} \, dx = \int_1^2 3x^2 - 2 \cdot x^{-2} \, dx = \left[x^3 - \frac{2x^{-1}}{-1} \right]_1^2 = \left[x^3 + \frac{2}{x} \right]_1^2 = (8+1) - (1+2) = 6$$

$$c) \int_1^4 3 \cdot \sqrt{x} + 1 \, dx = \int_1^4 3 \cdot x^{\frac{1}{2}} + 1 \, dx = \left[2 \cdot x^{\frac{3}{2}} + x \right]_1^4 = (2 \cdot 4 \cdot 2 + 4) - (2 \cdot 1 + 1) = 17$$

$$d) \int_0^4 \sqrt{2x+1} \, dx = \int_0^4 (2x+1)^{\frac{1}{2}} \, dx = \left[\frac{2}{3} \cdot (2x+1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right]_0^4 = \left[\frac{1}{3} \cdot (2x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \left[\frac{1}{3} \cdot (2x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \left(\frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \sqrt{9} \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \right) = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$$

$$e) \int_1^e \frac{3}{2x} \, dx = \frac{3}{2} \cdot \int_1^e \frac{1}{x} \, dx = \frac{3}{2} \cdot \left[\ln|x| \right]_1^e = \frac{3}{2} \cdot (\ln e - \ln 1) = \frac{3}{2} \cdot (1 - 0) = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$f) \int_1^2 \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \left[\ln|1+x^2| \right]_1^2 = \ln 5 - \ln 2 = \ln 2,5 \approx 0,916$$

$$g) \int_0^3 \frac{3x}{1+x^2} \, dx = \frac{3}{2} \cdot \int_0^3 \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \frac{3}{2} \cdot \left[\ln|1+x^2| \right]_0^3 = \frac{3}{2} \cdot (\ln 10 - \ln 1) = \frac{3}{2} \cdot \ln 10 \approx 3,45$$

$$h) \int_{-1}^{+1} 2e^x \, dx = \left[2e^x \right]_{-1}^{+1} = 2e - \frac{2}{e} \approx 4,70$$

$$\text{i) } \int_0^2 2e^{0,5x} dx = \left[2 \cdot \frac{e^{0,5x}}{0,5} \right]_0^2 = \left[4 \cdot e^{0,5x} \right]_0^2 = 4e - 4 \cdot 1 = 4 \cdot (e-1)$$

$$\text{j) } \int_0^2 3e^{-x} dx = \left[3 \cdot (-e^{-x}) \right]_0^2 = \left[-\frac{3}{e^x} \right]_0^2 = -\frac{3}{e^2} - \left(-\frac{3}{1}\right) = 3 - \frac{3}{e^2}$$

$$\text{k) } \int_0^1 2xe^{x^2} dx = \left[e^{x^2} \right]_0^1 = e - 1$$

$$\text{l) } \int_0^\pi 2\cos x dx = \left[2 \cdot \sin x \right]_0^\pi = 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

$$\text{m) } \int_0^\pi \cos \frac{x}{2} dx = \left[2 \cdot \sin \frac{x}{2} \right]_0^\pi = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \sin 0 = 2 \cdot 1 - 0 = 2$$

$$\text{n) } \int_0^{\pi/4} \sin 2x dx = \left[\frac{1}{2} \cdot (-\cos 2x) \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \cdot (-\cos \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2} \cdot (-\cos 0) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{o) } \int_0^{0,5} 2 \cdot \sin(\pi \cdot x) dx = \left[\frac{2}{\pi} \cdot (-\cos(\pi \cdot x)) \right]_0^{0,5} = \frac{2}{\pi} \cdot (-\cos(\frac{\pi}{2})) - \frac{2}{\pi} \cdot (-\cos 0) =$$

$$0 + \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

