Q12 * Mathematik * Ebenen und Geraden im R^3

1. Gegeben sind im R^3 die Ebene E mit

   $E:\ x_1 - k x_2 + 2x_3 - 4 = 0 \quad (k \neq 0)$ und

   die Gerade $g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Bestimmen Sie k so, dass g parallel zu E verläuft. Gilt dann $g \subseteq E$?

2. Gegeben sind im R^3 die Ebene $E:\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - a = 0 \quad (a \in R)$ und

   die Gerade $g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad (k \in R)$.

   a) Zunächst gelte $a = 4$. Bestimmen Sie k so, dass g parallel zu E verläuft.
      Begründen Sie, dass dann $g \cap E = \{\ \}$ gilt.

   b) Nun gelte $k = 7$, d.h. g verläuft parallel zu E.
      Bestimmen Sie a so, dass $g \subseteq E$ gilt.

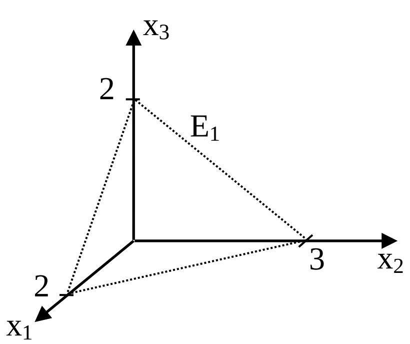
3. Gegeben ist im R^3 die Ebene $E:\ 2x_1 - x_3 - 3 = 0$.

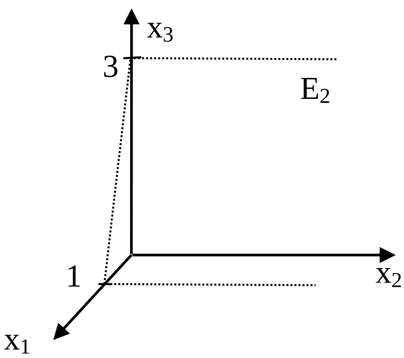
   a) Geben Sie eine Gerade g an, die ganz in E liegt.

   b) Geben Sie zwei von E verschiedene Ebenen F_1 und F_2 an, die ebenfalls g enthalten.

   c) Geben Sie eine Gerade k so an, dass gilt $k \subseteq F_1$ und $k \cap E = \{\ \}$.
      Fertigen Sie eine Skizze an!

4. Die beiden Bilder zeigen die Ebenen E_1 und E_2 .





   a) Geben Sie E_1 und E_2 in Koordinatenform an und bestimmen Sie die Schnitt-gerade der beiden Ebenen.

   b) Zeichnen Sie die beiden Ebenen in ein gemeinsames Koordinatensystem.
      Kennzeichnen Sie die Schnittgerade und geben Sie die zugehörige Gleichung an.

Q12 * Mathematik * Ebenen und Geraden im R3 * Lösungen

1. $k = \frac{5}{2}$; d.h. $E:\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 8 = 0$

   $A(1/2/3) \in g$ und $A(1/2/3) \notin E$, d.h. $g \cap E = \{\ \}$

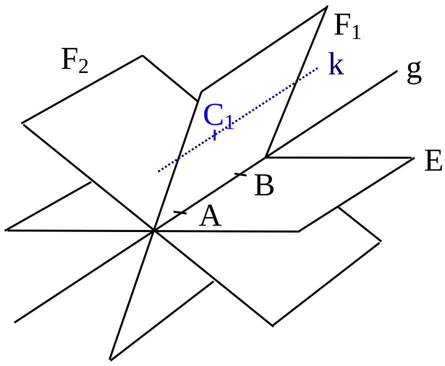
2. a) Für $k = 7$ gilt $g \cap E = \{\ \}$, d.h. g verläuft parallel zu E.

   b) Für $k = 7$ und $a = 5$ gilt $g \subseteq E$.

3. a) $A(1/0/-1) \in E$ und $B(0/0/-3) \in E$, d.h. $g:\ \vec{X} = \vec{B} + r \cdot \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ passt.

   b) $C_1(1/0/0) \notin E$ und $C_2(0/1/0) \notin E$, d.h. $\overrightarrow{BC_1}$ und $\overrightarrow{BC_2}$ sind keine Richtungsvektoren von Ebene E. Damit sind geeignete Ebenen z.B.
   $F_1:\ \vec{X} = \vec{B} + s \cdot \overrightarrow{BA} + t \cdot \overrightarrow{BC_1}$ und $F_2:\ \vec{X} = \vec{B} + p \cdot \overrightarrow{BA} + q \cdot \overrightarrow{BC_2}$

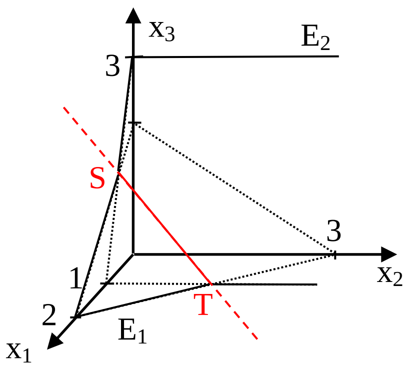
   c) Die Gerade k muss parallel zu E und damit parallel zu g liegen. Wählt man als Aufpunkt von k den Punkt $C_1(1/0/0) \notin E$, so erhält man $k:\ \vec{X} = \vec{C_1} + w \cdot \overrightarrow{BA}$.



4. a) $E_1:\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$ und $E_2:\ 3x_1 + x_3 = 3$ und

   Schnittgerade z.B. $g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

   b) Die Spurgeraden von E_1 und E_2 in der x_1-x_2-Ebene bzw. der x_1-x_3-Ebene schneiden sich ersichtlich in den beiden Punkten T(1/1,5/0) und S(0,5/0/1,5). (S berechnen in x_1-x_3-Ebene)



   Damit erhält man für die Schnittgerade

   $g:\ \vec{X} = \vec{T} + r \cdot \overrightarrow{TS}$ bzw.

   $g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -1{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ oder $g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$