Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Bernoulli-Kette bzw. Binomialverteilung

1. Ein Laplace-Würfel wird 100mal geworfen.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse?
   a) A = „Höchstens 10mal eine 6“
   b) B = „Mindestens 20mal eine Zahl größer als 2“
   c) C = „Genau 55mal eine gerade Ziffer“
   d) D = „Mehr als 45mal eine gerade Ziffer“

2. Mit zwei idealen Würfeln wird 20mal geworfen.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse?
   a) A = „Genau zweimal die Augensumme 7“
   b) B = „Mindestens zweimal die Augensumme 7“
   c) C = „Niemals die Augensumme 6“
   d) D = „Genau dreimal einen Pasch“ (Pasch bedeutet zwei gleiche Ziffern)
   e) E = „Niemals eine 1“

3. a) Wie oft muss man eine Laplace-Münze mindestens werfen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens einmal „Kopf“ erhält?
   b) Beim „Mensch ärgere dich nicht“ darf jeder, der an der Reihe ist, am Anfang dreimal würfeln. Nur wer dabei eine 6 würfelt, darf dann herauskommen.
   Wie oft muss man mindestens an der Reihe sein, wenn man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% herauskommen will?

4. Hans schießt auf die Torwand, und zwar zuerst auf das untere und anschließend auf das obere Loch.
   Aus langjähriger Erfahrung weiß er: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% trifft er „oben“ und - unabhängig davon - trifft er mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% „unten“.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er „oben und unten“?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er genau einmal?
   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er nicht?

   Nun wiederholt Hans 20mal das Schießen auf das untere und obere Loch.
   d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er genau dreimal „oben und unten“?
   e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er bei genau 15 Versuchen weder das untere noch das obere Loch?
   f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er bei höchstens 5 Versuchen beide Löcher?
   g) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er in mindestens 16 Versuchen mindestens eines der beiden Löcher?

   Hans will mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% bei wenigstens einem Versuch beide Löcher treffen.
   Wie oft muss er dann seine zwei Schüsse auf die Torwand mindestens abgeben?

Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Bernoulli-Kette bzw. Binomialverteilung Lösungen

1. a) $P_{1/6}^{100}(k \le 10) = \sum_{i=0}^{10} B(100;\frac{1}{6};i) = 0,04270 = 4,270\%$

b) $P_{4/6}^{100}(k \ge 20) = 1 - P_{2/3}^{100}(k \le 19) = 1 - \sum_{i=0}^{19} B(100;\frac{2}{3};i) = 1 - 0,00000 = 100,000\%$

c) $P_{3/6}^{100}(k = 55) = B(100;0,5;55) = 0,04847 = 4,847\%$

d) $P_{3/6}^{100}(k > 45) = 1 - P_{0,5}^{100}(k \le 45) = 1 - \sum_{i=0}^{45} B(100;0,5;i) = 1 - 0,18410 = 81,590\%$

2. $7 = 1+6 = 2+5 = 3+4$; P(„Augensumme 7 bei einem Wurf“) = $\frac{3\cdot 2}{6\cdot 6} = \frac{1}{6}$

$6 = 1+5 = 2+4 = 3+3$; P(„Augensumme 6 bei einem Wurf“) = $\frac{2\cdot 2+1}{6\cdot 6} = \frac{5}{36}$

P(„Pasch bei einem Wurf“) = $\frac{6}{6\cdot 6} = \frac{1}{6}$

P(„Keine 1 bei einem Wurf“) = $1 - \frac{6+6-1}{6\cdot 6} = \frac{25}{36}$

a) $P(A) = P_{1/6}^{20}(k = 2) = B(20;\frac{1}{6};2) = 19,824\%$

b) $P(B) = P_{1/6}^{20}(k \ge 2) = 1 - P_{1/6}^{20}(k \le 1) = 1 - 0,13042 = 86,958\%$

c) $P(C) = (1 - \frac{5}{36})^{20} = \left(\frac{31}{36}\right)^{20} \approx 5,026\%$

d) $P(D) = P_{1/6}^{20}(k = 3) = B(20;\frac{1}{6};3) = 23,789\%$

e) $P(E) = P_{25/36}^{20}(k = 20) = B(20;\frac{25}{36};20) = \left(\frac{25}{36}\right)^{20} \approx 6,8\cdot 10^{-2}\,\%$

3. a) $P_{0,5}^{n}(k \ge 1) \ge 99\% \Leftrightarrow 1 - P_{0,5}^{n}(k = 0) \ge 0,99 \Leftrightarrow 0,01 \ge 0,5^n \Leftrightarrow$

$\ln(0,01) \ge n\cdot\ln(0,5) \Leftrightarrow \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} \le n \Leftrightarrow n \ge 6,6...$ also $n \ge 7$

b) P(„Mindestens eine 6 bei drei Würfen“) = $1 - \frac{5\cdot 5\cdot 5}{6\cdot 6\cdot 6} = \frac{91}{216}$

$P_{91/216}^{n}(k \ge 1) \ge 95\% \Leftrightarrow 1 - P_{91/216}^{n}(k = 0) \ge 0,95 \Leftrightarrow 0,05 \ge \left(\frac{125}{216}\right)^n \Leftrightarrow$

$\ln(0,05) \ge n\cdot\ln(\frac{125}{216}) \Leftrightarrow \frac{\ln(0,05)}{\ln(125/216)} \le n \Leftrightarrow n \ge 5,4...$ also $n \ge 6$

4. a) $P(\text{"oben und unten"}) = p_1 = 0,40\cdot 0,25 = 0,10$

b) $P(\text{"genau einmal"}) = p_2 = 0,40\cdot 0,75 + 0,60\cdot 0,25 = 0,45$

c) $P(\text{"trifft nicht"}) = p_3 = 0,60\cdot 0,75 = 0,45 = 1 - p_1 - p_2$

d) $P_{0,10}^{20}(k = 3) = B(20;0,10;3) = 19,012\%$ e) $P_{0,45}^{20}(k = 15) = B(20;0,45;15) = 0,490\%$

f) $P_{0,10}^{20}(k \le 5) = \sum_{i=0}^{5} B(20;0,10;i) = 98,875\%$

g) $P_{0,55}^{20}(k \ge 16) = 1 - P_{0,55}^{20}(k \le 15) = 1 - 98,114\% = 1,886\ \%$

letzte Aufgabe: $P_{0,10}^{20}(k \ge 1) \ge 95\% \Leftrightarrow 0,05 \ge 0,90^n \Leftrightarrow n \ge 28,4...$ also $n \ge 29$