Q12 * Mathematik * Analytische Geometrie * Typische Aufgaben

Wichtige unverzichtbare Formeln:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} \;;\quad \vec{a}\circ\vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3 \;;\quad \left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}\circ\vec{a}} = \sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}$$

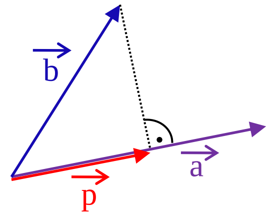
$$\vec{a}\circ\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi(\vec{a},\vec{b}) \text{ also } \cos\varphi(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} \quad\text{und}\quad \vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\circ\vec{b} = 0$$

$$\vec{a}\,\mathrm{x}\,\vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{a}\,\mathrm{x}\,\vec{b} \perp \vec{a} \text{ und } \vec{a}\,\mathrm{x}\,\vec{b} \perp \vec{b} \text{ und } \left|\vec{a}\,\mathrm{x}\,\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi(\vec{a},\vec{b})$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\,\mathrm{x}\,\overrightarrow{AC}\right| \;;\quad V_{\text{Pyramide ABCD}} = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\circ(\overrightarrow{AC}\,\mathrm{x}\,\overrightarrow{AD})\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AD}\circ(\overrightarrow{AB}\,\mathrm{x}\,\overrightarrow{AC})\right|$$

Hilfreich: Die **Projektion** $\vec{p}$ eines Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$

$$\vec{p} = \frac{\vec{b}\circ\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|^2}\cdot\vec{a} = \frac{\vec{b}\circ\vec{a}}{\vec{a}\circ\vec{a}}\cdot\vec{a}$$



Typische Aufgaben:

1. Wandle die Parameterform einer Ebene in die Normalenform (bzw. HNF) um!

$E:\; \vec{X} = \vec{A} + r\cdot\vec{v} + s\cdot\vec{w}$; Finde zunächst $\vec{n}_E = \vec{v}\,\mathrm{x}\,\vec{w}$ und dann $E: \left(\vec{X} - \vec{A}\right)\circ\vec{n}_E = 0$

Beispiel: $E:\; \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\mathrm{x}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ oder } \vec{n}_E = \begin{pmatrix} n_1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{n}_E\circ\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \vec{n}_E{}' = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E:\; \left(\vec{X} - \vec{A}\right)\circ\vec{n}_E{}' = 0 \quad\text{also}\quad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \quad\text{also}$$

$$E:\; 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 15 = 0 \quad\text{und}\quad E_{HNF}: \frac{1}{\sqrt{25+16+4}}(-5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 15) = 0$$

2. Wandle die Normalenform einer Ebene in die Parameterform um! (Selten gebraucht!)

Beispiel: $E:\; 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 15 = 0$; Berechne möglichst einfach drei Punkte der Ebene:
$5\cdot(-3) - 4\cdot 0 - 2\cdot 0 + 15 = 0$ also $(-3/0/0)$ Punkt der Ebene, analog $(1/5/0)$, $(1/4/2)$.

$$E:\; \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 5-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 4-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} \quad\text{also}\quad E:\; \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Oder finde zwei Richtungsvektoren $\vec{v}\perp\vec{n}_E$ und $\vec{v}\perp\vec{n}_E$ mit $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ z.B. $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

3. Berechne Schnittpunkt von Gerade und Ebene.

   a) Falls Ebene in Parameterform gegeben ist, ergibt das Gleichsetzen drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Lösen mit dem Gauß-Algorithmus. Einsetzen der gefundenen Parameter in die Geraden- oder Ebenengleichung liefert den Schnittpunkt.

   Beispiel: $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

   (1) $-1 \quad + t = 3 + r \quad \Rightarrow \quad t = 4 + r$ in (2) und (3)

   (2) $1 + 2s \quad = 4 + r$ (2) $r = 2s - 3$ in (3)

   (3) $3s + t = 9 + 3r$ (3) $3s = 5 + 2r$ (3) $s = 1 \Rightarrow r = -1$, $t = 3$

   Schnittpunkt $\vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ also $g \cap E = \{ S(2/3/6) \}$

   b) Meist einfacher: Ebenengleichung in Normalenform umwandeln.
   Dann x_1, x_2 und x_3 von der Geradengleichung in Normalenform einsetzen und Parameter der Geraden ermitteln. (Falls keine Lösung: kein Schnittpunkt; falls allgemein gültig: Gerade liegt in der Ebene) Gefundenen Parameter in Geradengleichung einsetzen und damit Schnittpunkt berechnen.

   Beispiel: $E: \ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 1 = 0$ und $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

   $2 \cdot (3 + r) + 3 \cdot (4 + r) - 2 \cdot (9 + 3r) - 1 = 0 \Leftrightarrow -r - 1 = 0 \Leftrightarrow r = -1$

   Schnittpunkt $\vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ also $g \cap E = \{ S(2/3/6) \}$

4. Berechne Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen.
   Am einfachsten lösbar in Normalenform. Wandle Normalenform in die so genannte Achsenabschnittsform um.

   $E: \ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4 = 0 \Leftrightarrow 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4 \Leftrightarrow \frac{3x_1}{-4} - \frac{5x_2}{-4} + \frac{x_3}{-4} = 1 \Leftrightarrow$

   $\frac{x_1}{-\frac{4}{3}} + \frac{x_2}{\frac{4}{5}} + \frac{x_3}{-4} = 1 \Leftrightarrow$ Schnittpunkte: $S_1(-\frac{4}{3}/0/0)$, $S_2(0/\frac{4}{5}/0)$, $S_3(0/0/-4)$

   Hinweise:

   $E: \ \frac{x_1}{2} + \frac{x_3}{-3} = 1$ bedeutet, dass es keinen Schnittpunkt mit der x_2-Koordinatenachse gibt, die Ebene E also parallel zu dieser Achse verläuft.

   Die Schnittgerade einer Ebene mit der x_1x_2-Koordinateneben verläuft durch die beiden Schnittpunkte der Ebene mit der x_1- und der x_2- Koordinatenachse.

5. Berechne Schnittgerade zweier Ebenen.

Die Ebenen können in Parameter- oder Normalenform vorliegen:

Beispiel: $E_1:\ \vec{X}=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$; $E_2:\ \vec{X}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+p\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+q\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

d.h. $E_1:\ 2x_1+4x_2+x_3-13=0$; $E_2:\ x_1+x_2+x_3-6=0$

Am aufwändigsten ist die Berechnung der Schnittgeraden – falls die Ebenen nicht parallel liegen – wenn beide Ebenen in Parameterform vorliegen.

a) Beide Ebenen in Parameterform:
Gleichsetzen liefert drei Gleichungen mit 4 Unbekannten.
Eliminiere nach dem Gauß-Algorithmus die beiden Parameter <u>einer</u> der beiden Ebenen.
Das liefert einen Zusammenhang zwischen den beiden Parametern der zweiten Ebene (oder bei parallelen Ebenen einen Widerspruch oder eine Aussage der Form 0 = 0).
Einsetzen in die zweite Ebenengleichung liefert direkt die Schnittgerade.
Unser Beispiel:

$E_1:\ \vec{X}=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$; $E_2:\ \vec{X}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+p\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+q\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$E_1 \cap E_2:$

(1) $4+2r+3s=2+p+q$ (1) $s=q-3p-2$ in (3)

(2) $1-r-s=1-2p \quad \Rightarrow\ r=2p-s$ in (1) und (3)

(3) $1\quad -2s=3+p-q$ (3) $q=2+p+2s$ (3) $q=2+5p$

Schnittgerade g

$$g:\ \vec{X}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+p\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+(2+5p)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2\\1+0\\3-2\end{pmatrix}+p\cdot\begin{pmatrix}1+5\\-2+0\\1-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}+p\cdot\begin{pmatrix}6\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

b) Eine Ebene in Parameter- die andere in Normalenform:

$E_1:\ 2x_1+4x_2+x_3-13=0$; $E_2:\ \vec{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+p\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+q\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

Setze x_1, x_2, x_3 aus der Parameterform in die Normalenform ein. Das liefert wieder den Zusammenhang zwischen p und q, der beim Einsetzen in E_2 die Schnittgerade g liefert.

$E_1 \cap E_2:$

$2\cdot(2+p+q)+4\cdot(1-2p)+(3+p-q)-13=0 \ \Rightarrow \ldots \Rightarrow\ q=2+5p$

Schnittgerade g wie im Fall a) durch Einsetzen von $q = 2+5p$ in E_2 (siehe oben!).

c) Beide Ebenen in Normalenform:
Reduziere aus 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten x_1, x_2, x_3 eine Gleichung mit nur noch 2 Unbekannten. Wähle dann eine davon als freie Variable $r \in R$ und drücke die anderen durch r aus.

$E_1:\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 13 = 0 \ ; \quad E_2:\ x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0$

(1) $2x_1 + 4x_2 + x_3 - 13 = 0$ (1) $x_1 = 7 - 3x_2$, wähle $x_2 = r \in R$

(2) $x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0 \Rightarrow x_3 = 6 - x_1 - x_2$ in (1)

mit $x_2 = r \in R$ gilt $x_1 = 7 - 3x_2 = 7 - 3r$ und $x_3 = 6 - x_1 - x_2 = 6 - 7 + 3r - r = -1 + 2r$

Die Schnittgerade g lautet damit

$$g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-3r \\ r \\ -1+2r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6. Bestimme den Abstand eines Punktes P von einer Ebene E.
Wandle E in Hesse-Normalenform (HNF) um und setze die Koordinaten von P in den Term der HNF ein. Das Ergebnis entspricht dem gesuchten Abstand d, wobei ein negatives d darauf hinweist, dass der Punkt im gleichen Halbraum wie der Ursprung liegt.
Beispiel:

$$E:\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5 = 0 \ ; \ \text{d.h. } \vec{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } |\vec{n_E}| = \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29}$$

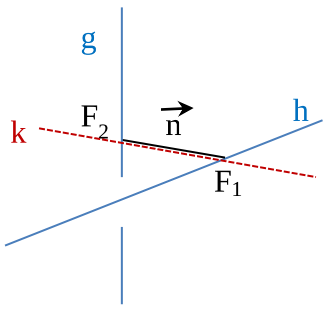
$$E_{HNF}:\ \frac{1}{\sqrt{29}}(-2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 5) = 0$$; für $P(1/2/3)$ und $Q(0/-3/1)$ gilt nun

$$d(E;P) = \frac{1}{\sqrt{29}}(-2\cdot 1 - 4\cdot 2 + 3\cdot 3 - 5) = -\frac{6}{\sqrt{29}}$$ P liegt im gleichen Halbraum wie (0/0/0).

$$d(E;Q) = \frac{1}{\sqrt{29}}(-2\cdot 0 - 4\cdot(-3) + 3\cdot 1 - 5) = \frac{10}{\sqrt{29}}$$ und Q und der Ursprung (0/0/0) liegen in den beiden unterschiedlichen Halbräumen, in die die Ebene den Raum teilt.

7. Bestimme den Abstand zweier windschiefer Geraden g und h.
Ermittle Vektor $\vec{n}$ senkrecht zu den Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ von g und h.
Die Hilfsebene E enthält g und hat $\vec{n}$ als zweiten Richtungsvektor. $E \cap h = \{F_1\}$
Die Gerade k durch F_1 mit Richtungsvektor $\vec{n}$ schneidet g im Punkt F_2 und der Gesuchte Abstand ist der Abstand dieser beiden Punkte F_1 und F_2.

$$g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \ h:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und}$$



$$E:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } E \cap h = \{F_1(2/5/8)\} ;$$

$$k \cap g = \{(F_2(4/3/4)\} \text{ und } d = \overline{F_1F_2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = 2\sqrt{6}$$