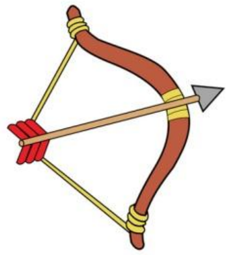
Q12 * Mathematik * Wiederholung zur analytischen Geometrie
Vermischte Aufgaben



1. Berechnen Sie im Dreieck ABC die Seitenlängen und die Innenwinkel.
   A(2 / – 3 / 4), B(– 1 / 1 / 4) und C(4 / – 1 / 3).

2. Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   a) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren.

   b) Bestimmen Sie je drei Vektoren die auf $\vec{a}$ bzw. auf $\vec{b}$ senkrecht stehen.

   c) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{c}$, der sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ senkrecht steht.

3. Das Dreieck ABC ist durch A(–1/ 4 / 3), B(5 / – 5 / 6) und C(7 / 0 / 3) gegeben.

   a) Berechnen Sie den Fußpunkt F des Lotes von C auf die Seite [AB].

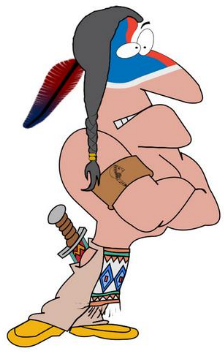
   b) Berechnen Sie die Länge der Höhe h_c und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

4. Gegeben sind die Punkte A(1 / – 2 / 3), B(5 / 2 / 1) und C_k(5 + 2k / – 1 – k / 4 + 2k) mit $k \in R$.

   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC_k für $k \neq -1$ gleichschenklig ist.

   b) Für welchen Wert von k ist das Dreieck gleichseitig?

   c) Für welchen Wert von k ist das Dreieck rechtwinklig?



5. Gegeben sind die Punkte A(5 / 0 / 2) , B(3 / 1 / 4) und C(5 / 3 / 5) im R^3.

   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig ist.

   b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt $F_{\Delta ABC}$ des Dreiecks ABC.

   c) Bestimmen Sie einen Punkt S so, dass das Volumen der Pyramide ABCS das Volumen V = 9 besitzt.

6. Gegeben sind die Punkte A(1 / 2 / –3) , B(3 / 5 / 3) und C(9 / 7 / 0) im R^3.

   a) Zeigen Sie, dass sich das Dreieck ABC zu einem Quadrat ABCD ergänzen lässt. Bestimmen Sie die Koordinaten von D und den Flächeninhalt dieses Quadrats.

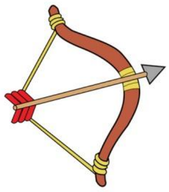
   b) Zeigen Sie dass sich das Quadrat ABCD zu einem Würfel ABCDEFGH erweitern lässt. Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte E, F, G und H und das Volumen dieses Würfels.

7. Gegeben sind die Punkte A(–3 / –2 / 4) , B(5 / 4 / 0) und P(2 / 5 / 10) im R^3.

   a) Zeigen Sie, dass die drei Punkte A, B und P nicht auf einer Geraden liegen.

   b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden AB.

Q12 * Mathematik * Wiederholung zur analytischen Geometrie * Lösungen



1. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und damit

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5 \;;\; \overline{AC} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3 \;;\; \overline{BC} = \sqrt{5^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{30}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} = \frac{-6+8+0}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15} \;\Rightarrow\; \alpha \approx 82{,}3^\circ \;;$$

$$\cos ß = \frac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}}{\overline{BA} \cdot \overline{BC}} = \frac{15+8-0}{5 \cdot \sqrt{30}} = \frac{23}{5 \cdot \sqrt{30}} \;\Rightarrow\; ß \approx 32{,}9^\circ \;;\; \gamma \approx 180^\circ - 32{,}9^\circ - 82{,}3^\circ = 64{,}8^\circ$$

2. a) $$\cos\varphi = \frac{-12-4+3}{\sqrt{36+4+9} \cdot \sqrt{4+4+1}} = \frac{-13}{7 \cdot 3} \;\Rightarrow\; \varphi \approx 128{,}2^\circ$$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$: z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \vec{a}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \perp \vec{a}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \perp \vec{a}$ und z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Für $\vec{c}$ muss gelten $\vec{a} \circ \vec{c} = 0$ und $\vec{b} \circ \vec{c} = 0 \;\Rightarrow$

(1) $6c_1 - 2c_2 + 3c_3 = 0$ und (2) $-2c_1 + 2c_2 + c_3 = 0$

Eleminiere z.B. c_2 durch $(1)+(2) \Rightarrow 4c_1 + 4c_3 = 0$ und wähle nun frei $c_1 = 1 \;\Rightarrow\; c_3 = -1$

und in (2) eingesetzt folgt $-2 + 2c_2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; c_2 = 1{,}5$ also $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

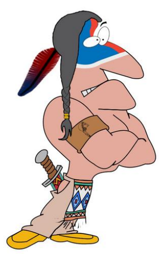
3. Das Dreieck ABC ist durch A(–1/ 4 / 3), B(5 / – 5 / 6) und C(7 / 0 / 3) gegeben.

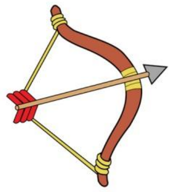
a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AF} = \dfrac{\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{48+36+0}{(3 \cdot \sqrt{4+9+1})^2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} =$

$$\frac{84}{9 \cdot 14} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \vec{F} = \vec{A} + \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} -1+4 \\ 4-6 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ also } F(3/-2/5)$$

b) $$h_c = \left|\overrightarrow{CF}\right| = \sqrt{(3-7)^2 + (-2-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16+4+4} = 2 \cdot \sqrt{6}$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{4+9+1} \cdot 2 \cdot \sqrt{6} = 3 \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{6} = 6 \cdot \sqrt{21}$$





4. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC_k} = \begin{pmatrix} 4+2k \\ 1-k \\ 1+2k \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC_k} = \begin{pmatrix} 2k \\ -3-k \\ 3+2k \end{pmatrix}$;

$\overline{AC_k} = \sqrt{16+16k+4k^2+1-2k+k^2+1+4k+4k^2} = \sqrt{18+18k+9k^2}$

$\overline{BC_k} = \sqrt{4k^2+9+6k+k^2+9+12k+4k^2} = \sqrt{18+18k+9k^2}$ also $\overline{AC_k} = \overline{BC_k}$

(Für $k=-1$ gilt $C_1(3/0/2)$ und C_1 ist der Mittelpunkt der Strecke [AB].)

b) Das Dreieck ABC ist gleichseitig, falls gilt

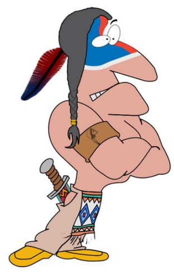
$\overline{AC_k} = \overline{AB} \Leftrightarrow \sqrt{16+16+4} = \sqrt{18+18k+9k^2} \Leftrightarrow 36 = 18+18k+9k^2 \Leftrightarrow$

$0 = -18+18k+9k^2 \Leftrightarrow k^2+2k-2=0 \Leftrightarrow k_{1/2} = \frac{1}{2}\cdot(-2\pm\sqrt{4+4\cdot 2}) = -1\pm\sqrt{3}$

c) Das Dreieck ABC ist rechtwinklig, falls gilt $\overrightarrow{AC_k} \circ \overrightarrow{BC_k} = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} 4+2k \\ 1-k \\ 1+2k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2k \\ -3-k \\ 3+2k \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 8k+4k^2-3+2k+k^2+3+8k+4k^2 = 0 \Leftrightarrow$

$9k^2+18k = 0 \Leftrightarrow 9k\cdot(k+2) = 0 \Leftrightarrow k_3 = 0$; $k_4 = -2$



5. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4+1+4} = 3$ und

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = -4+2+2 = 0$ d.h. $\sphericalangle CBA = 90^{\circ}$ und $\overline{AB} = \overline{BC}$

b) $F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 = 4{,}5$

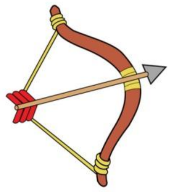
c) $9 = V_{\text{pyramide}} = \frac{1}{3}\cdot F_{\Delta ABC}\cdot h \Rightarrow h = \frac{9\cdot 3}{F_{\Delta ABC}} = \frac{27}{4{,}5} = 6$

Suche ein $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ und $\vec{n} \perp \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = -3\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

wegen $|\vec{n}| = \sqrt{1+4+4} = 3 = \frac{1}{2}\cdot h$ lautet ein geeignetes S z.B.

$\vec{S} = \vec{A} + 2\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ also $S(7/-4/6)$.

6. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4+9+36} = 7$ und



$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 12+6-18 = 0$ d.h. $\sphericalangle CBA = 90^o$ und $\overline{AB} = \overline{BC}$

$\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ also $D(7/4/-6)$ und $F_{\Delta ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 7 \cdot 7 = 49$

b) Suche ein $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ und $\vec{n} \perp \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -21 \\ 42 \\ -14 \end{pmatrix} = -7 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$, wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$,

wegen $\left|\vec{n}\right| = \sqrt{9+36+4} = 7$ damit gilt $\vec{E} = \vec{A} + \vec{n}$, $\vec{F} = \vec{B} + \vec{n}$, $\vec{G} = \vec{C} + \vec{n}$, $\vec{H} = \vec{D} + \vec{n}$

also $E(4/-4/-1)$, $F(6/-1/5)$, $G(12/1/2)$ und $H(10/-2/-4)$.

7. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ und ersichtlich $\overrightarrow{AP} \neq r \cdot \overrightarrow{AB}$,

also liegen A, B und P nicht auf einer Geraden.

b) Die Projektion $\vec{p} = \overrightarrow{AF}$ von $\overrightarrow{AP}$ auf $\overrightarrow{AB}$ liefert den Fußpunkt F des Lotes von P auf AB. Es gilt:

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AP} \circ \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB}} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{40+42-24}{64+36+16} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{58}{116} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AF} = \vec{F} - \vec{A} \Rightarrow$$

$\vec{F} = \overrightarrow{AF} + \vec{A}$ $\Rightarrow$ $F(1/1/2)$ und der gesuchte Abstand beträgt $d = \overline{FP} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2} = 9$