Q12 * Mathematik * Wiederholung der Ableitungsregeln

Wichtige Ableitungsregeln

$$f(x) = a \cdot g(x) + b \cdot h(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = a \cdot g'(x) + b \cdot h'(x)$$

$$f(x) = a \cdot x^r \;\Rightarrow\; f'(x) = a \cdot r \cdot x^{r-1} \quad (\text{für } r \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

insbesondere auch $\quad f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

$$f(x) = a \cdot e^{bx} \;\Rightarrow\; f'(x) = a \cdot e^{bx} \cdot b$$

$$f(x) = a \cdot \ln(bx) \;\Rightarrow\; f'(x) = a \cdot \frac{1}{bx} \cdot b = \frac{a}{x}$$

Produktregel: $\quad f(x) = u(x) \cdot v(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Quotientenregel: $\quad f(x) = \frac{z(x)}{n(x)} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{n(x) \cdot z'(x) - n'(x) \cdot z(x)}{n(x)^2}$

Kettenregel: $\quad f(x) = g(h(x)) \;\Rightarrow\; f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

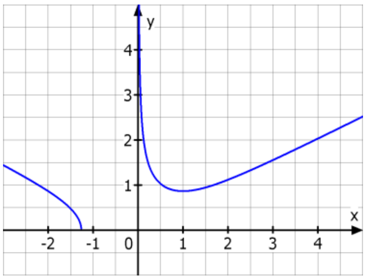
Aufgaben:

Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen jeweils D_f und dann die erste und zweite Ableitung. Ermitteln Sie dann – sofern möglich – alle Hoch-, Tief-, Terrassen- und Wendepunkte.

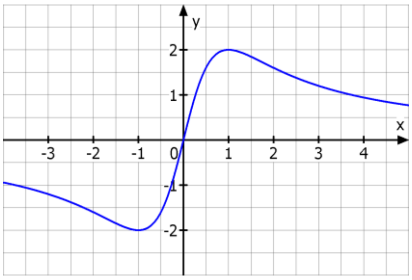
1. $f_1(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^{2-x}$
2. $f_2(x) = \ln(2x) - \ln(1 + x^2)$
3. $f_3(x) = \frac{e^x}{1 + x^2}$
4. $f_4(x) = \frac{4x}{1 + x^2}$
5. $f_5(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{2}{x}}$
6. $f_6(x) = (x^2 - 2x) \cdot (x^2 + x)$

Ordnen Sie die Graphen der sechs Funktionen den abgebildeten Graphen zu.

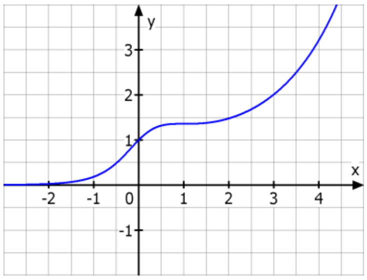
a)



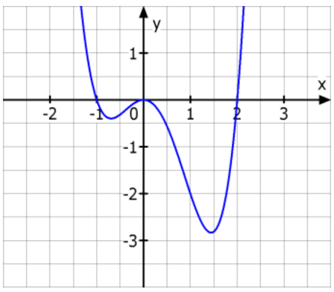
b)



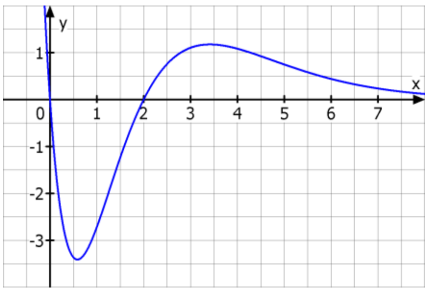
c)



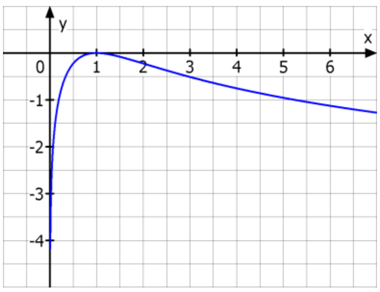
d)



e)



f)



Q12 * Mathematik * Wiederholung der Ableitungsregeln * Lösungen

1. $f_1(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^{2-x}$ $\quad D_{f_1} = \mathbb{R}$ $\quad$ Bild e)

$f_1'(x) = (-x^2 + 4x - 2) \cdot e^{2-x}$ und $f_1''(x) = (x^2 - 6x + 6) \cdot e^{2-x}$

$f_1'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2}$ $\quad$ TIP bei $x_1 = 2 + \sqrt{2}$ und HOP bei $x_2 = 2 - \sqrt{2}$

$f_1''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{3/4} = 3 \pm \sqrt{3}$ $\quad$ WP bei $x_{3/4}$

2. $f_2(x) = \ln(2x) - \ln(1 + x^2)$; $D_{f_2} = \mathbb{R}^+$ $\quad$ Bild f)

$$f_2'(x) = \frac{1 - x^2}{x(1 + x^2)} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{x(1 + x^2)} \quad \text{und} \quad f_2''(x) = \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{x^2(1 + x^2)^2}$$

$f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ $\quad$ HOP(1/0)

$f_2''(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 1 = 0$ mit $u = x^2$ also $u^2 - 4u - 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$

Wendepunkt bei x_2

3. $f_3(x) = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$; $D_{f_3} = \mathbb{R}$ $\quad$ Bild c)

$$f_3'(x) = \frac{(x - 1)^2 \cdot e^x}{(1 + x^2)^2} \quad \text{und} \quad f_2''(x) = \frac{(-4x^3 + 9x^2 - 4x - 1) \cdot e^x}{(1 + x^2)^3} = \frac{(x - 1) \cdot (-4x^2 + 5x + 1) \cdot e^x}{(1 + x^2)^3}$$

$f_3'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ $\quad$ Terrassenpunkt $(1/\frac{e}{2})$ und damit Wendepunkt $(1/\frac{e}{2})$

$f_3''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1$; $x_{2/3} = \frac{1}{8} \cdot (5 \pm \sqrt{41})$ $\quad$ WP bei x_1, x_2 und x_3

4. $f_4(x) = \dfrac{4x}{1 + x^2}$; $D_{f_4} = \mathbb{R}$ $\quad$ Bild b)

$$f_4'(x) = \frac{4 - 4x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{4 \cdot (1 - x) \cdot (1 + x)}{(1 + x^2)^2} \quad \text{und} \quad f_4''(x) = \frac{8x^3 - 24x}{(1 + x^2)^3} = \frac{8x \cdot (x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}$$

$f_4'(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1$, $\quad$ HOP(1/2) und TIP(−1/−2)

$f_4''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = 0$; $x_{4/5} = \pm\sqrt{3}$ $\quad$ WP bei x_3, x_4 und x_5

5. $f_5(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 + \dfrac{2}{x}}$; $D_{f_5} = \mathbb{R} \setminus [-\sqrt[3]{2}; 0]$ $\quad$ Bild a)

$$f_5'(x) = \frac{(x^3 - 1)}{2x \cdot \sqrt{x^4 + 2x}} \quad \text{und} \quad f_5''(x) = \frac{x \cdot (2x^6 - 4x^5 + 3x^3 + 4x^2 + 4)}{2x^2 \cdot (x^4 + 2x) \cdot \sqrt{x^4 + 2x}}$$

$f_5'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$, $\quad$ TIP$(1/0{,}5 \cdot \sqrt{3})$; $f_5''(x) = 0$ keine Lösung $x \in D_{f_5}$ erkennbar.

6. $f_6(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$ $\quad D_{f_6} = \mathbb{R}$ $\quad$ Bild d)

$f_6'(x) = x \cdot (4x^2 - 3x - 4)$ und $f_6''(x) = 2 \cdot (6x^2 - 3x - 2)$

$f_6'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0$; $x_{2/3} = \frac{1}{8}(3 \pm \sqrt{73})$ $\quad$ HOP bei x_1 und TIP bei $x_{2/3}$

$f_1''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{4/5} = \frac{1}{12} \cdot (3 \pm \sqrt{57})$ $\quad$ WP bei $x_{4/5}$