Q12 * Mathematik m1 * 1. Stegreifaufgabe am 21.11.2017 * Gruppe A

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (2 - x) \cdot e^{0,5x}$.
   Bestimmen Sie alle Intervalle, in denen der Graph von f rechtsgekrümmt ist.

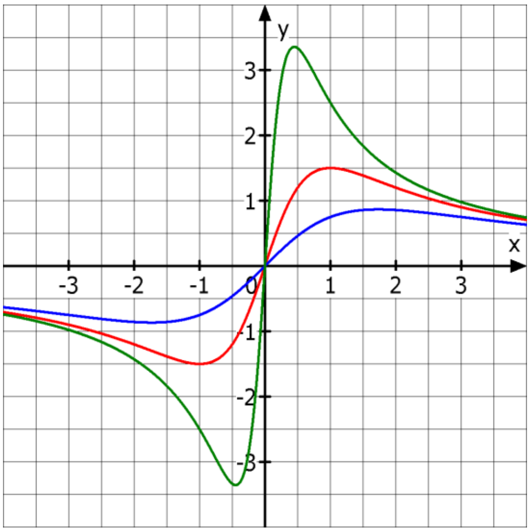
2. Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = \dfrac{3x}{x^2 + k}$ mit $k > 0$.

   Das Bild zeigt drei Graphen dieser Schar.

   a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k alle Hochpunkte der Schar.
   Welcher Wert von k gehört zum roten Graphen?
   $[\text{Teilergebnis: } \text{HOP}(\sqrt{k} \ / \ \frac{3\sqrt{k}}{2k})]$

   b) Die Hochpunkte der Schar liegen auf dem Graphen der Funktion h.
   Bestimmen Sie den Funktionsterm von h und geben Sie den zugehörigen Definitionsbereich an.

   c) Unter allen Hochpunkten der Schar gibt es einen, der vom Ursprung (0/0) den geringsten Abstand besitzt.
   Bestimmen Sie zu diesem Hochpunkt den zugehörigen Wert von k.



Aufgabe	1	2a	b	c	Summe
Punkte	6	6	3	6	21

Gutes Gelingen! G.R.

Q12 * Mathematik m1 * 1. Stegreifaufgabe am 21.11.2017 * Gruppe B

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (1 - 2x) \cdot e^{2x}$.
   Bestimmen Sie alle Intervalle, in denen der Graph von f rechtsgekrümmt ist.

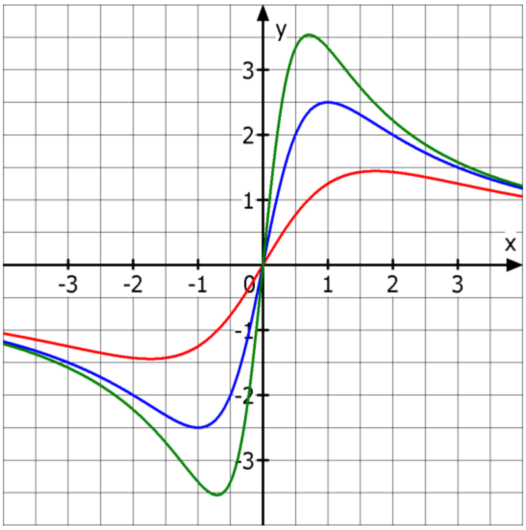
2. Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = \dfrac{5x}{x^2 + k}$ mit $k > 0$.

   Das Bild zeigt drei Graphen dieser Schar.

   a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k alle Hochpunkte der Schar.
   Welcher Wert von k gehört zum blauen Graphen?
   [Teilergebnis: $HOP(\sqrt{k} \;/\; \dfrac{5\sqrt{k}}{2k})$]

   b) Die Hochpunkte der Schar liegen auf dem Graphen der Funktion h.
   Bestimmen Sie den Funktionsterm von h und geben Sie den zugehörigen Definitionsbereich an.

   c) Unter allen Hochpunkten der Schar gibt es einen, der vom Ursprung (0/0) den geringsten Abstand besitzt.
   Bestimmen Sie zu diesem Hochpunkt den zugehörigen Wert von k.



Aufgabe	1	2a	b	c	Summe
Punkte	6	6	3	6	21

Gutes Gelingen! G.R.

Q12 * Mathematik m1 * 1. Stegreifaufgabe am 21.11.2017 * Gruppe A * Lösung

1. $f(x) = (2-x)\cdot e^{0,5x}$; $f'(x) = (0,5\cdot(2-x)-1)\cdot e^{0,5x} = -0,5x\cdot e^{0,5x}$

$f''(x) = (-0,5\cdot 0,5x - 0,5)\cdot e^{0,5x} = -0,25\cdot(x+2)\cdot e^{0,5x}$

G_f rechtsgekrümmt $\Leftrightarrow$ $f''(x) < 0 \Leftrightarrow -0,25\cdot(x+2) < 0 \Leftrightarrow x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

G_f ist rechtsgekrümmt im Intervall $]-2\,;\infty[$.

2.a) $f_k(x) = \dfrac{3x}{x^2+k}$ mit $k > 0$; $f_k'(x) = \dfrac{3\cdot(x^2+k) - 3x\cdot 2x}{(x^2+k)^2} = \dfrac{3k - 3x^2}{(x^2+k)^2} = \dfrac{3(k - x^2)}{(x^2+k)^2}$

$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow k - x^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{k}$; $y_{1/2} = \dfrac{\pm 3\sqrt{k}}{k+k} = \pm\dfrac{3\sqrt{k}}{2k}$

$f_k'(x)$ ändert nur bei $x_1 = \sqrt{k}$ das Vorzeichen von + auf −, daher HOP$\left(\sqrt{k} \;/\; \dfrac{3\sqrt{k}}{2k}\right)$

Der rote Graph gehört zu $k=1$.

b) $x_H = \sqrt{k}$ und $y_H = \dfrac{3\sqrt{k}}{2k} \Rightarrow y_H = \dfrac{3x_H}{2x_H^{\,2}} = \dfrac{3}{2x_H}$ also $h(x) = \dfrac{3}{2x}$ mit $x > 0$ also $D_h = \mathbb{R}^+$

c) $d(k) = \sqrt{\sqrt{k}^{\,2} + \left(\dfrac{3\sqrt{k}}{2k}\right)^2} = \sqrt{k + \dfrac{9}{4k}}$

$d'(k) = \dfrac{1 - \dfrac{9}{4k^2}}{2\cdot\sqrt{k + \dfrac{9}{4k}}}$ und $d'(k) = 0 \Leftrightarrow 1 = \dfrac{9}{4k^2} \Leftrightarrow k^2 = \dfrac{9}{4}$ und $k = \dfrac{3}{2}$

alternative Lösung: $d(x_H) = \sqrt{x_H^{\,2} + y_H^{\,2}} = \sqrt{x_H^{\,2} + \left(\dfrac{3}{2x_H}\right)^2}$

$d'(x) = \dfrac{2x + \dfrac{9}{4}\cdot(-2x^{-3})}{2\cdot\sqrt{x^2 + \left(\dfrac{3}{2x}\right)^2}} = \dfrac{2x - \dfrac{9}{2x^3}}{2\cdot\sqrt{x^2 + \left(\dfrac{3}{2x}\right)^2}}$ und $d'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{9}{2x^3} \Leftrightarrow x^4 = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow$

$x = \sqrt[4]{\dfrac{9}{4}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ und $k = x^2 = \dfrac{3}{2}$

Q12 * Mathematik m1 * 1. Stegreifaufgabe am 21.11.2017 * Gruppe B * Lösung

1. $f(x) = (1-2x)\cdot e^{2x}$; $f'(x) = (2\cdot(1-2x)-2)\cdot e^{2x} = -4x\cdot e^{2x}$

$f''(x) = (-4x\cdot 2-4)\cdot e^{2x} = -4\cdot(2x+1)\cdot e^{2x}$

G_f rechtsgekrümmt $\Leftrightarrow$ $f''(x) < 0 \Leftrightarrow -4\cdot(2x+1) < 0 \Leftrightarrow 2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -0{,}5$

G_f ist rechtsgekrümmt im Intervall $]-0{,}5\,;\infty[$.

2.a) $f_k(x) = \dfrac{5x}{x^2+k}$ mit $k > 0$; $f_k'(x) = \dfrac{5\cdot(x^2+k)-5x\cdot 2x}{(x^2+k)^2} = \dfrac{5k-5x^2}{(x^2+k)^2} = \dfrac{5(k-x^2)}{(x^2+k)^2}$

$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow k - x^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{k}$; $y_{1/2} = \dfrac{\pm 5\sqrt{k}}{k+k} = \pm\dfrac{5\sqrt{k}}{2k}$

$f_k'(x)$ ändert nur bei $x_1 = \sqrt{k}$ das Vorzeichen von + auf −, daher HOP$\left(\sqrt{k} \;/\; \dfrac{5\sqrt{k}}{2k}\right)$

Der blaue Graph gehört zu $k=1$.

b) $x_H = \sqrt{k}$ und $y_H = \dfrac{5\sqrt{k}}{2k} \Rightarrow y_H = \dfrac{5x_H}{2x_H{}^2} = \dfrac{5}{2x_H}$ also $h(x) = \dfrac{5}{2x}$ mit $x > 0$ also $D_h = \mathbb{R}^+$

c) $d(k) = \sqrt{\sqrt{k}^{\,2} + \left(\dfrac{5\sqrt{k}}{2k}\right)^2} = \sqrt{k + \dfrac{25}{4k}}$

$$d'(k) = \frac{1-\dfrac{25}{4k^2}}{2\cdot\sqrt{k+\dfrac{25}{4k}}} \quad \text{und} \quad d'(k) = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{25}{4k^2} \Leftrightarrow k^2 = \frac{25}{4} \quad \text{und} \quad k = \frac{5}{2}$$

alternative Lösung: $d(x_H) = \sqrt{x_H{}^2 + y_H{}^2} = \sqrt{x_H{}^2 + \left(\dfrac{5}{2x_H}\right)^2}$

$$d'(x) = \frac{2x + \dfrac{25}{4}\cdot(-2x^{-3})}{2\cdot\sqrt{x^2+\left(\dfrac{5}{2x}\right)^2}} = \frac{2x - \dfrac{25}{2x^3}}{2\cdot\sqrt{x^2+\left(\dfrac{5}{2x}\right)^2}} \quad \text{und} \quad d'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{25}{2x^3} \Leftrightarrow x^4 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow$$

$x = \sqrt[4]{\dfrac{25}{4}} = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ und $k = x^2 = \dfrac{5}{2}$