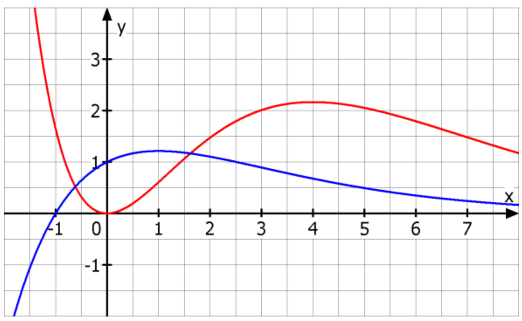
Q11 * Mathematik m6 * Klausur am 29.04.2013 * Gruppe A

1. Gegeben sind die Punkte $A(2/1/0)$, $B(0/5/4)$ und $C(-5/-3/5)$.
   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig mit Basis [AB] ist und berechnen Sie die Größe des Winkels $\gamma = \sphericalangle ACB$.
   b) Das Dreieck ABC lässt sich mit einem Punkt D zu einer Raute erweitern. Bestimmen Sie die Koordinaten von D.
   c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
   d) Das Dreieck ABC legt eine Ebene E fest. Eine Kugel mit Mittelpunkt M und Radius $r = 6$ soll diese Ebene E im Punkt A berühren. Bestimmen Sie die Koordinaten von M.
   e) Vergrößert man den Radius dieser Kugel um M von $r = 6$ auf $r_2 = 8$, so schneiden sich die Ebene E und die vergrößerte Kugel in einem Kreis mit Radius ρ . Berechnen Sie ρ .

2. Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion f mit $f(x) = \dfrac{2x+2}{\sqrt{x^2+2}}$ mit $x \in R$.

   Bestimmen Sie alle Intervalle, in denen die Funktion f umkehrbar ist.
   (Die Umkehrfunktion ist nicht zu berechnen!)

3. Das Bild zeigt die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = x^2 \cdot e^{-0,5x}$ und $g(x) = \dfrac{x+1}{e^{0,5x}}$.



   a) Bestimmen Sie mit geeigneter Rechnung alle Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f .
   b) Bestimmen Sie die beiden Schnittstellen x_1 und x_2 der Graphen.

Aufgabe	1a	b	c	d	e	2	3a	b	Summe
Punkte	4	2	3	4	3	6	5	5	32

Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * Mathematik m6 * Klausur am 29.04.2013 * Gruppe B

1. Gegeben sind die Punkte $A(1/2/0)$, $B(5/0/4)$ und $C(-3/-5/5)$.

   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig mit Basis [AB] ist und berechnen Sie die Größe des Winkels $\gamma = \sphericalangle ACB$.

   b) Das Dreieck ABC lässt sich mit einem Punkt D zu einer Raute erweitern. Bestimmen Sie die Koordinaten von D.

   c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

   d) Das Dreieck ABC legt eine Ebene E fest. Eine Kugel mit Mittelpunkt M und Radius $r = 6$ soll diese Ebene E im Punkt A berühren. Bestimmen Sie die Koordinaten von M.

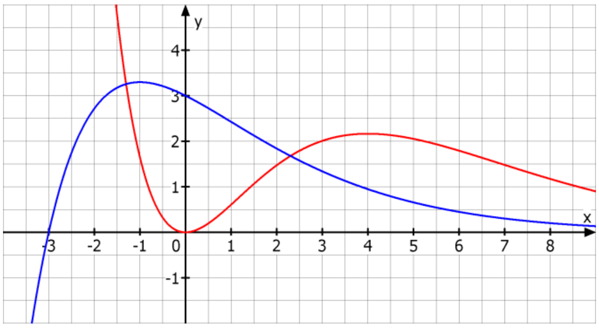
   e) Vergrößert man den Radius dieser Kugel um M von $r = 6$ auf $r_2 = 9$, so schneiden sich die Ebene E und die vergrößerte Kugel in einem Kreis mit Radius ρ. Berechnen Sie ρ.

2. Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion f mit $f(x) = \dfrac{2x+4}{\sqrt{x^2+2}}$ mit $x \in R$.

   Bestimmen Sie alle Intervalle, in denen die Funktion f umkehrbar ist.
   (Die Umkehrfunktion ist nicht zu berechnen!)

3. Das Bild zeigt die Graphen der Funktionen

   f und g mit $f(x) = x^2 \cdot e^{-0{,}5x}$ und $g(x) = \dfrac{x+3}{e^{0{,}5x}}$.



   a) Bestimmen Sie mit geeigneter Rechnung alle Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f.

   b) Bestimmen Sie die beiden Schnittstellen x_1 und x_2 der Graphen.

Aufgabe	1a	b	c	d	e	2	3a	b	Summe
Punkte	4	2	3	4	3	6	5	5	32

Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * Mathematik m6 * Klausur am 29.04.2013 * Gruppe A

1. a) $A(2/1/0)$, $B(0/5/4)$ und $C(-5/-3/5)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{49+16+25} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \quad \text{und} \quad \left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{25+64+1} = \sqrt{90} = \left|\overrightarrow{CA}\right| \quad \Rightarrow \text{Beh.}$$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{35+32+5}{\sqrt{90}\cdot\sqrt{90}} = \frac{72}{90} = 0{,}8 \Rightarrow \gamma = 36{,}86...^\circ \approx 36{,}9^\circ$$

b) $\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$ also $D(7/9/-1)$

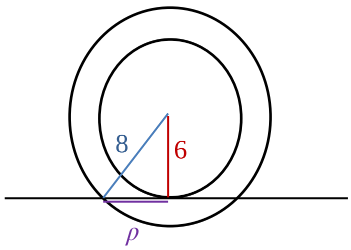
c) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -18 \\ 36 \end{pmatrix}$ und $F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot 18 \cdot \sqrt{4+1+4} = 9\cdot 3 = 27$

d) Normalenvektor zur Ebene E: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 36 \\ -18 \\ 36 \end{pmatrix} = 18\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 3 \Rightarrow$

$\vec{M}_{1/2} = \vec{A} \pm 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und z.B. $\vec{M} = \vec{M}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ also $M(6/-1/4)$

e) Pythagoras: $\rho^2 + 6^2 = 8^2 \Rightarrow$

$\rho = \sqrt{64-36} = \sqrt{28} = 2\cdot\sqrt{7}$



2. $f(x) = \dfrac{2x+2}{\sqrt{x^2+2}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\left[2\cdot\sqrt{x^2+2} - (2x+2)\cdot\dfrac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+2}}\right]\cdot\sqrt{x^2+2}}{(x^2+2)\cdot\sqrt{x^2+2}} =$

$$\frac{2\cdot(x^2+2) - (2x+2)\cdot x}{(x^2+2)\cdot\sqrt{x^2+2}} = \frac{2x^2+4-2x^2-2x}{(x^2+2)\cdot\sqrt{x^2+2}} = \frac{4-2x}{(x^2+2)\cdot\sqrt{x^2+2}}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4-2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$ und $f'(x) > 0$ für $x < 2$ und $f'(x) < 0$ für $x > 2$

f ist also in $]-\infty\,;2]$ und in $[2\,;\infty[$ jeweils streng monoton und deshalb in diesen beiden Intervallen jeweils umkehrbar.

3. a) $f(x) = x^2 \cdot e^{-0,5x} \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^{-0,5x} + x^2 \cdot e^{-0,5x} \cdot (-0,5) = (2x - 0,5x^2) \cdot e^{-0,5x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 0,5x^2 = 0 \Leftrightarrow 0,5x \cdot (4 - x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 4$

$f'(x) > 0$ für $x \in]0;4[$ und $f'(x) < 0$ für $x \in R \setminus [0;4] \Rightarrow$

$TIP(0/f(0)) = (0/0)$ und $HOP(4/f(4)) = (4/16 \cdot e^{-2}) \approx (4/2,17)$

b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 \cdot e^{-0,5x} = \frac{x+1}{e^{0,5x}} \Leftrightarrow x^2 \cdot e^{-0,5x} - (x+1) \cdot e^{-0,5x} = 0 \Leftrightarrow$

$(x^2 - x - 1) \cdot e^{-0,5x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1+4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{5}\right)$

$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right) \approx 1,62$ und $x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{5}\right) \approx -0,62$

Q11 * Mathematik m6 * Klausur am 29.04.2013 * Gruppe B

1. a) $A(1/2/0)$, $B(5/0/4)$ und $C(-3/-5/5)$ $\Rightarrow \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{16+49+25} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \quad \text{und} \quad \left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{64+25+1} = \sqrt{90} = \left|\overrightarrow{CA}\right| \quad \Rightarrow \text{Beh.}$$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{32+35+5}{\sqrt{90}\cdot\sqrt{90}} = \frac{72}{90} = 0{,}8 \Rightarrow \gamma = 36{,}86...^\circ \approx 36{,}9^\circ$$

b) $\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ also $D(9/7/-1)$

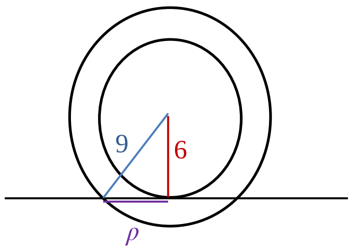
c) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix}$ und $F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot 18\cdot\sqrt{1+4+4} = 9\cdot 3 = 27$

d) Normalenvektor zur Ebene E: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} = 18\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = 3 \Rightarrow$

$\vec{M}_{1/2} = \vec{A} \pm 2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und z.B. $\vec{M} = \vec{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ also $M(3/-2/-4)$

e) Pythagoras: $\rho^2 + 6^2 = 9^2 \Rightarrow$

$\rho = \sqrt{81-36} = \sqrt{45} = 3\cdot\sqrt{5}$



2. $f(x) = \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\left[2\cdot\sqrt{x^2+2} - (2x+4)\cdot\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+2}}\right]\cdot\sqrt{x^2+2}}{(x^2+2)\cdot\sqrt{x^2+2}} =$

$$\frac{2\cdot\left(x^2+2\right) - (2x+4)\cdot x}{(x^2+2)\cdot\sqrt{x^2+2}} = \frac{2x^2+4-2x^2-4x}{(x^2+2)\cdot\sqrt{x^2+2}} = \frac{4-4x}{(x^2+2)\cdot\sqrt{x^2+2}}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4-4x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ und $f'(x) > 0$ für $x < 1$ und $f'(x) < 0$ für $x > 1$

f ist also in $]-\infty\,;1]$ und in $[1\,;\infty[$ jeweils streng monoton und deshalb in diesen beiden Intervallen jeweils umkehrbar.

3. a) $f(x) = x^2 \cdot e^{-0,5x} \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^{-0,5x} + x^2 \cdot e^{-0,5x} \cdot (-0,5) = (2x - 0,5x^2) \cdot e^{-0,5x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 0,5x^2 = 0 \Leftrightarrow 0,5x \cdot (4 - x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 4$

$f'(x) > 0$ für $x \in]0;4[$ und $f'(x) < 0$ für $x \in R \setminus [0;4] \Rightarrow$
$TIP(0/f(0)) = (0/0)$ und $HOP(4/f(4)) = (4/16 \cdot e^{-2}) \approx (4/2{,}17)$

b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 \cdot e^{-0,5x} = \dfrac{x+3}{e^{0,5x}} \Leftrightarrow x^2 \cdot e^{-0,5x} - (x+3) \cdot e^{-0,5x} = 0 \Leftrightarrow$

$(x^2 - x - 3) \cdot e^{-0,5x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 + 12}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{13}\right)$

$x_1 = \dfrac{1}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{13}\right) \approx 2{,}30$ und $x_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{13}\right) \approx -1{,}30$