Q11 * Mathematik * Aufgaben zur Wiederholung der Algebra

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

   a) $0 = 2x^3 + 12x^2 - 18x$

   b) $0 = x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - 6x - 6$

   c) $x^4 + 24x = 4x^3 + 2x^2 + 24$

   d) $0{,}1x^5 + 2{,}5x^3 = x^4$

   e) $\frac{2}{x} + 3 = 2x$

   f) $\frac{2}{3-x} + \frac{5}{2x+1} = 3$

   g) $x^3 - 36x = 36 - x^2$

   h) $x^4 - 7x = \frac{8}{x^2}$

2. Geben Sie die Definitionsmenge des Terms an und vereinfachen Sie ihn dann so weit wie möglich!

   a) $\frac{3}{x+1} - \frac{2x+1}{1-x} + \frac{5x^2 + x + 2}{x^2 - 1}$

   b) $\frac{2-x}{3x} - \frac{3-x}{x-2} + \frac{3x-1}{6-3x}$

   c) $\frac{x+1}{x-3} - \frac{3-x}{2x} + \frac{2x+2}{6-2x}$

3. Bestimmen Sie den Definitionsbereich und alle Nullstellen der Funktion f.

   a) $f(x) = \frac{2x^2 - 12x + 18}{3x^4 - 12x^2}$

   b) $f(x) = \frac{2x+1}{x+2} - \frac{x+2}{2x-1}$

   c) $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x}$

Q11 * Mathematik * Aufgaben zur Wiederholung der Algebra * Lösungen

1. a) $0 = 2x^3 + 12x^2 - 18x \Leftrightarrow 2x \cdot (x^2 + 6x - 9) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ oder } x^2 + 6x - 9 = 0$

$x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x_{2/3} = \frac{1}{2} \cdot (-6 \pm \sqrt{36 + 4 \cdot 9}) = \frac{1}{2} \cdot (-6 \pm 6\sqrt{2}) = -3 \pm 3\sqrt{2}$

b) $0 = x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - 6x - 6$ Probieren: $x_1 = -1$ und Polynomdivision liefert

$0 = (x+1) \cdot (x^4 - x^2 - 6) \Leftrightarrow 0 = (x+1) \cdot (x^2 - 3) \cdot (x^2 + 2) \Leftrightarrow x_1 = -1 ;\ x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$

c) $x^4 + 24x = 4x^3 + 2x^2 + 24 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 24x - 24 = 0$ durch Probieren $x_1 = 2$

Pol.division: $0 = (x-2) \cdot (x^3 - 2x^2 - 6x + 12) \Leftrightarrow x_1 = 2$ oder $x^3 - 2x^2 - 6x + 12 = 0$

Probieren: $x_2 = 2$ und $0 = x^3 - 2x^2 - 6x + 12 = (x-2) \cdot (x^2 - 6)$ also $x_{1/2} = 2$ oder $x^2 = 6$

also lauten die Lösungen $x_{1/2} = 2 ;\ x_{3/4} = \pm\sqrt{6}$

d) $0{,}1x^5 + 2{,}5x^3 = x^4 \Leftrightarrow 0{,}1x^5 - x^4 + 2{,}5x^3 = 0 \Leftrightarrow 0{,}1x^3 \cdot (x^2 - 10x + 25) = 0 \Leftrightarrow$

$0{,}1x^3 \cdot (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2/3} = 0 ;\ x_{4/5} = \pm\sqrt{5}$

e) $\frac{2}{x} + 3 = 2x \Leftrightarrow 2 + 3x = 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1}{4} \cdot (3 \pm \sqrt{9+16}) = \frac{3 \pm 5}{4}$

also $x_1 = 2 ;\ x_2 = -0{,}5$

f) $\frac{2}{3-x} + \frac{5}{2x+1} = 3 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot (2x+1) + 5 \cdot (3-x)}{(3-x) \cdot (2x+1)} = 3 \Leftrightarrow 4x + 2 + 15 - 5x = 3 \cdot (6x + 3 - 2x^2 - x)$

$\Leftrightarrow 17 - x = 15x + 9 - 6x^2 \Leftrightarrow 6x^2 - 16x + 8 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$x_{1/2} = \frac{1}{6} \cdot (8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 3 \cdot 4}) = \frac{1}{6} \cdot (8 \pm \sqrt{16}) = \frac{8 \pm 4}{6}$ also $x_1 = 2 ;\ x_2 = \frac{2}{3}$

g) $x^3 - 36x = 36 - x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 36x - 36 = 0$ durch Probieren $x_1 = -1$

$(x+1) \cdot (x^2 - 36) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 ;\ x_{2/3} = \pm 6$

h) $x^4 - 7x = \frac{8}{x^2} \Leftrightarrow x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ Substitution $u = x^3$ also $u^2 - 7u - 8 = 0 \Leftrightarrow$

$(u-8) \cdot (u+1) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8$ oder $x^3 = -1$ also $x_1 = 2 ;\ x_2 = -1$

2. a) $\frac{3}{x+1} - \frac{2x+1}{1-x} + \frac{5x^2+x+2}{x^2-1} = \frac{3}{x+1} + \frac{2x+1}{x-1} + \frac{5x^2+x+2}{(x+1)\cdot(x-1)}$ also $D = \mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$

$\frac{3\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)} + \frac{(2x+1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)} + \frac{5x^2+x+2}{(x+1)\cdot(x-1)} =$

$\frac{3x-3+2x^2+2x+x+1+5x^2+x+2}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{7x^2+7x}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{7x(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{7x}{x-1}$

b) $\frac{2-x}{3x} - \frac{3-x}{x-2} + \frac{3x-1}{6-3x} = \frac{2-x}{3x} - \frac{3-x}{x-2} - \frac{3x-1}{3\cdot(x-2)}$ also $D = \mathbb{R}\setminus\{0\,;2\}$

$\frac{(2-x)\cdot(x-2)}{3x\cdot(x-2)} - \frac{(3-x)\cdot 3x}{(x-2)\cdot 3x} - \frac{(3x-1)\cdot x}{3\cdot(x-2)\cdot x} = \frac{2x-4-x^2+2x-9x+3x^2-3x^2+x}{(x-2)\cdot 3x} =$

$\frac{-x^2-4x-4}{(x-2)\cdot 3x} = \frac{-(x^2+4x+4)}{(x-2)\cdot 3x} = \frac{-(x+2)^2}{3x\cdot(x-2)}$

c) $\frac{x+1}{x-3} - \frac{3-x}{2x} + \frac{2x+2}{6-2x} = \frac{x+1}{x-3} - \frac{3-x}{2x} - \frac{2x+2}{2\cdot(x-3)}$ also $D = \mathbb{R}\setminus\{0\,;3\}$

$\frac{(x+1)\cdot 2x}{(x-3)\cdot 2x} - \frac{(3-x)\cdot(x-3)}{2x\cdot(x-3)} - \frac{(2x+2)\cdot x}{2\cdot(x-3)\cdot x} = \frac{2x^2+2x-(3x-9-x^2+3x)-2x^2-2x}{(x-3)\cdot 2x} =$

$\frac{x^2-6x+9}{(x-3)\cdot 2x} = \frac{(x-3)^2}{(x-3)\cdot 2x} = \frac{x-3}{2x}$

3. a) $f(x) = \frac{2x^2-12x+18}{3x^4-12x^2} = \frac{2\cdot(x^2-6x+9)}{3x^2\cdot(x^2-4)} = \frac{2\cdot(x-3)^2}{3x^2\cdot(x-2)\cdot(x+2)}$

also $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0;-2;2\}$ und NSt.: $f(x)=0 \Leftrightarrow x_{1/2}=3$

b) $f(x) = \frac{2x+1}{x+2} - \frac{x+2}{2x-1} = \frac{(2x+1)\cdot(2x-1)-(x+2)\cdot(x+2)}{(x+2)\cdot(2x-1)} = \frac{4x^2-1-(x^2+4x+4)}{(x+2)\cdot(2x-1)} =$

$\frac{3x^2-4x-5}{(x+2)\cdot(2x-1)}$ also $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\,;\frac{1}{2}\}$ und NSt.: $f(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow$

$x_{1/2} = \frac{1}{6}\cdot(4\pm\sqrt{16+4\cdot3\cdot5}) = \frac{1}{6}\cdot(4\pm\sqrt{16+4\cdot3\cdot5}) = \frac{1}{6}\cdot(4\pm\sqrt{16+4\cdot3\cdot5}) =$

$\frac{1}{6}\cdot(4\pm2\cdot\sqrt{19}) = \frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{19}}{3}$

c) $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x} = \frac{1\cdot(x+2)\cdot x + 2\cdot(x+1)\cdot x - 3\cdot(x+1)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(x+2)\cdot x} =$

$\frac{x^2+2x+2x^2+2x-(3x^2+6x+3x+6)}{(x+1)\cdot(x+2)\cdot x} = \frac{-5x-6}{(x+1)\cdot(x+2)\cdot x} = \frac{-5(x+1{,}2)}{(x+1)\cdot(x+2)\cdot x}$

also $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\,;-2\,;0\}$ und NSt.: $f(x)=0 \Leftrightarrow x_1=-1{,}2$