Q11 * Mathematik m6 * 2. Extemporale am 06.03.2013 * Gruppe 

1. Gegeben sind im R^3 die Punkte A(3 / 7 / 5), B(4 / 1 / 1) und C(5 / 9 / 5).
   a) Berechnen Sie im Dreieck ABC die Seitenlänge $c = \overline{AB}$ und die Größe des Winkels $\beta = \sphericalangle CBA$.
   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt A_Δ des Dreiecks ABC.
   c) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes S so, dass die Pyramide ABCS das Volumen V = 13,5 besitzt.

2. Gegeben ist im R^3 das Dreieck ABC mit A(1 / 2 / 2), B(7 / – 1 / 8) und C(10 / 5 / 3,5)
   a) M_a ist die Mitte der Dreiecksseite a = [BC] und F ist der Fußpunkt des Lots von C auf c = [AB]. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte M_a und F.
   [Teilergebnis: F(5 / 0 / 6)]
   b) Die Seitenhalbierende s_a und die Höhe h_c im Dreieck ABC schneiden sich im Punkt S. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S.

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	Summe
Punkte	5	3	5	5	5	23

Gutes Gelingen! G.R.

Hinweis:

Für die Projektion $\vec{p}$ des Vektors $\vec{v}$ auf den Vektor $\vec{w}$ gilt $\vec{p} = \frac{\vec{v} \circ \vec{w}}{|\vec{w}|^2} \cdot \vec{w}$

Q11 * Mathematik m6 * 2. Extemporale am 06.03.2013 * Gruppe

1. Gegeben sind im R^3 die Punkte A(7 / 3 / 6), B(1 / 4 / 2) und C(9 / 5 / 6).

   a) Berechnen Sie im Dreieck ABC die Seitenlänge $c = \overline{AB}$ und die Größe des Winkels $\beta = \sphericalangle CBA$.

   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt A_Δ des Dreiecks ABC.

   c) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes S so, dass die Pyramide ABCS das Volumen V = 13,5 besitzt.

2. Gegeben ist im R^3 das Dreieck ABC mit A(2 / 1 / 3), B(– 1 / 7 / 9) und C(5 / 10 / 4,5)

   a) M_a ist die Mitte der Dreiecksseite a = [BC] und F ist der Fußpunkt des Lots von C auf c = [AB]. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte M_a und F.
   [Teilergebnis: F(0 / 5 / 7)]

   b) Die Seitenhalbierende s_a und die Höhe h_c im Dreieck ABC schneiden sich im Punkt S. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S.

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	Summe
Punkte	5	3	5	5	5	23

Gutes Gelingen! G.R.

Hinweis:

Für die Projektion $\vec{p}$ des Vektors $\vec{v}$ auf den Vektor $\vec{w}$ gilt $\vec{p} = \frac{\vec{v} \circ \vec{w}}{\left|\vec{w}\right|^2} \cdot \vec{w}$

Q11 * Mathematik m6 * 2. Extemporale am 06.03.2013 * Gruppe * Lösung

1. $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$; und für b) $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -14 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$.

a) $c = \overline{AB} = \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{1+36+16} = \sqrt{53}$ und

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{1+64+16}} = \frac{-1+48+16}{\sqrt{53} \cdot 9} = \frac{7}{\sqrt{53}} \Rightarrow \beta = 15{,}945...^{o} \approx 15{,}9^{o}$$

b) $$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left| 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16+16+49} = \sqrt{81} = 9$$

c) $V = \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta ABC} \cdot h \Rightarrow h = \frac{3 \cdot V}{A_{\Delta ABC}} = \frac{3 \cdot 13{,}5}{9} = 4{,}5$ und $\vec{n} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ steht

senkrecht auf der Grundfläche. Daher kann man für S z.B. folgenden Ansatz verwenden:

$$\vec{S} = \vec{A} + h \cdot \frac{\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{4{,}5}{\sqrt{16+16+49}} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}; \quad S(1/9/1{,}5)$$

2. a) $$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}}{\sqrt{81} \cdot \sqrt{81}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{54}{81} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$ und

$\vec{F} = \vec{A} + \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, d.h. $F(5/0/6)$; $\overrightarrow{M_a} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \begin{pmatrix} 8{,}5 \\ 2 \\ 5{,}75 \end{pmatrix}$

b) $\vec{S} = \vec{A} + r \cdot \overrightarrow{AM_a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 0 \\ 3{,}75 \end{pmatrix}$ und $\vec{S} = \vec{C} + t \cdot \overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{array}{lll} 1 + 7{,}5r = 10 - 5t & & \Rightarrow 7{,}5r = 6 \Rightarrow r = 0{,}8 \\ 2 = 5 - 5t & \Rightarrow t = 0{,}6 & \\ 2 + 3{,}75r = 3{,}5 + 2{,}5t & & \Rightarrow 3{,}75r = 3 \Rightarrow r = 0{,}8 \quad \text{o.k.} \end{array}$$

$\vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0{,}8 \cdot \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 0 \\ 3{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, also $S(7/2/5)$

Q11 * Mathematik m6 * 2. Extemporale am 06.03.2013 * Gruppe  *** Lösung**

1. $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; und für b) $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

a) $c = \overline{AB} = \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{36+1+16} = \sqrt{53}$ und

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{64+1+16}} = \frac{48 - 1 + 16}{\sqrt{53} \cdot 9} = \frac{7}{\sqrt{53}} \Rightarrow \beta = 15{,}945...^{o} \approx 15{,}9^{o}$$

b) $$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left| 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16+16+49} = \sqrt{81} = 9$$

c) $V = \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta ABC} \cdot h \Rightarrow h = \frac{3 \cdot V}{A_{\Delta ABC}} = \frac{3 \cdot 13{,}5}{9} = 4{,}5$ und $\vec{n} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ steht

senkrecht auf der Grundfläche. Daher kann man für S z.B. folgenden Ansatz verwenden:

$$\vec{S} = \vec{A} + h \cdot \frac{\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{4{,}5}{\sqrt{16+16+49}} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 9{,}5 \end{pmatrix} ; \quad S(5/5/9{,}5)$$

2. a) $$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}}{\sqrt{81} \cdot \sqrt{81}} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{54}{81} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\vec{F} = \vec{A} + \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{ d.h. } F(0/5/7) ; \quad \overrightarrow{M_a} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8{,}5 \\ 6{,}75 \end{pmatrix}$$

b) $$\vec{S} = \vec{A} + r \cdot \overrightarrow{AM_a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7{,}5 \\ 3{,}75 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{S} = \vec{C} + t \cdot \overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 2 &= 5 - 5t && \Rightarrow t = 0{,}6 \\ 1 + 7{,}5r &= 10 - 5t && \Rightarrow 7{,}5r = 6 \Rightarrow r = 0{,}8 \\ 3 + 3{,}75r &= 4{,}5 + 2{,}5t && \Rightarrow 3{,}75r = 3 \Rightarrow r = 0{,}8 \quad \text{o.k.} \end{aligned}$$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0{,}8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7{,}5 \\ 3{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \text{ also } S(2/7/6)$$