Q11 * m3 * 2. Stegreifaufgabe aus der Mathematik am 11.03.2015 * Gruppe A

1. Gegeben sind die Punkte A(1/2/3) , B(4/8/0) und C(9/4/3).
   a) Bestimmen Sie die Größe des Winkels $\alpha = \sphericalangle BAC$ im Dreieck ABC.
   b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.
   c) Der Punkt F ist der Fußpunkt des Lotes von C auf die Seite [AB].
   Bestimmen Sie die Koordinaten von F.
   d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

2. Das Dreieck ABC mit den Punkten A(3/2/1) , B(5/6/1) und C(6/4/-1) legt die Ebene E fest.
   a) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes P, der von der Ebene E den Abstand 6 hat.
   (Mögliches Ergebnis zum Weiterrechnen z.B.: P(7/5/3))
   b) Geben Sie einen Punkt Q so an, dass die Gerade PQ windschief zu Geraden AB verläuft.

Aufgabe	1a	b	c	d	2a	b	Summe
Punkte	4	2	4	3	4	2	19

Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * m3 * 2. Stegreifaufgabe aus der Mathematik am 11.03.2015 * Gruppe B

1. Gegeben sind die Punkte A(3/2/1) , B(0/8/4) , C(3/4/9) und S(10/6/0).
   a) Bestimmen Sie die Größe des Winkels $\alpha = \sphericalangle BAC$ im Dreieck ABC.
   b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.
   c) Der Punkt F ist der Fußpunkt des Lotes von C auf die Seite [AB].
   Bestimmen Sie die Koordinaten von F.
   d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

2. Das Dreieck ABC mit den Punkten A(1/2/3) , B(1/6/5) und C(-1/4/6) legt die Ebene E fest.
   a) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes P, der von der Ebene E den Abstand 6 hat.
   (Mögliches Ergebnis zum Weiterrechnen z.B.: P(3/5/7))
   b) Geben Sie einen Punkt Q so an, dass die Gerade PQ windschief zu Geraden AB verläuft.

Aufgabe	1a	b	c	d	2a	b	Summe
Punkte	4	2	4	3	4	2	19

Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * m3 * 2. Stegreifaufgabe aus der Mathematik am 06.03.2015 * Gruppe A * Lösung

1. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

a) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{24+12-0}{\sqrt{9+36+9} \cdot \sqrt{64+4}} = \dfrac{36}{3\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{17}} = \dfrac{6}{\sqrt{102}} \Rightarrow \alpha = 53{,}55...^\circ \approx 53{,}6^\circ$

b) $\vec{C} - \vec{D} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{D} = \vec{C} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-3 \\ 4-6 \\ 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ also $D(6/-2/6)$

c) $\overrightarrow{AF} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{24+12-0}{9+36+9} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{36}{54} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F} = \vec{A} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

also $F(3/6/1)$

d) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{FC} = \begin{pmatrix} 9-3 \\ 4-6 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad F_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{FC}\right| = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{36+4+4} = 3 \cdot \sqrt{66}$

oder $F_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \dfrac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 6 \\ -24 \\ -42 \end{pmatrix}\right| = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{6^2 + 24^2 + 42^2} = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{66} = 3 \cdot \sqrt{66}$

2. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, für $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ und $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$ kann man z. B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ n_3 \end{pmatrix}$ wählen,

denn dann gilt $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ und für $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$ muss noch gelten $\vec{n} \circ \overrightarrow{AC} = 0$,

also $0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 6 - 2 - 2n_3 \Leftrightarrow n_3 = 2$ und damit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\left|\vec{n}\right| = \sqrt{4+1+4} = 3$.

oder kürzer: $\vec{n}^* = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8-0 \\ 0+4 \\ 4-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ also z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ein geeignetes P lautet damit $\vec{P} = \vec{A} + 2 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ also $P(7/0/5)$.

b) $\overrightarrow{AC}$ verläuft parallel zur Ebene E, damit kann man z.B.

$\vec{Q} = \vec{P} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ verwenden, d.h. $Q(10/2/3)$.

Q11 * m3 * 2. Stegreifaufgabe aus der Mathematik am 06.03.2015 * Gruppe B * Lösung

1. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{0+12+24}{\sqrt{9+36+9} \cdot \sqrt{4+64}} = \dfrac{36}{3\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{17}} = \dfrac{6}{\sqrt{102}} \Rightarrow \alpha = 53{,}55...^\circ \approx 53{,}6^\circ$

b) $\vec{C} - \vec{D} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{D} = \vec{C} - \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3 \\ 4-6 \\ 9-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ also $D(6/-2/6)$

c) $\overrightarrow{AF} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{0+12+24}{9+36+9} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{36}{54} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F} = \vec{A} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

also F(1/6/3)

d) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FC} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-6 \\ 9-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$; $F_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{FC}\right| = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{4+4+36} = 3 \cdot \sqrt{66}$

oder $F_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \dfrac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 42 \\ 24 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{42^2 + 24^2 + 6^2} = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{66} = 3 \cdot \sqrt{66}$

2. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, für $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ und $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$ kann man z. B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ wählen,

denn dann gilt $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ und für $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$ muss noch gelten $\vec{n} \circ \overrightarrow{AC} = 0$,

also $0 = \begin{pmatrix} n_1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2n_1 - 2 + 6 \Leftrightarrow n_1 = 2$ und damit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\left|\vec{n}\right| = \sqrt{4+1+4} = 3$.

oder kürzer: $\vec{n}^* = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-4 \\ -4-0 \\ 0+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ also z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ein geeignetes P lautet damit $\vec{P} = \vec{A} + 2 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ also $P(5/0/7)$.

b) $\overrightarrow{AC}$ verläuft parallel zur Ebene E, damit kann man z.B.

$\vec{Q} = \vec{P} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ verwenden, d.h. Q(3/2/10).