Q11 * Mathematik m1 * 1. Klausur am 11.11.2016 * Gruppe A

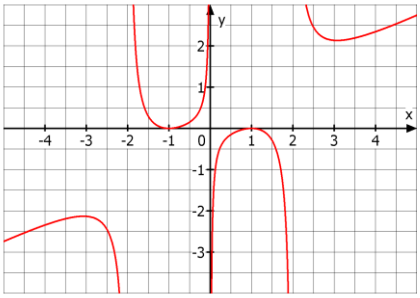
1. Die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{2x^3 - 8x}$ soll untersucht werden.

   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und alle Nullstellen von f.

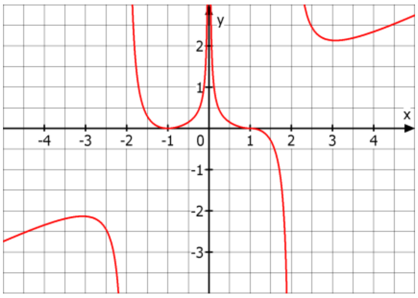
   b) Untersuchen Sie f an den Definitionslücken.

   c) Zeigen Sie, dass f für $x \to \pm\infty$ eine schräg liegende Asymptote besitzt und bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung.

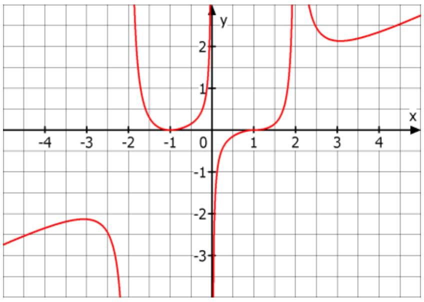
   d) Kann einer der drei abgebildeten Graphen zur Funktion f gehören? Begründen Sie, welche Graphen nicht in Frage kommen!



Graph 1



Graph 2



Graph 3

2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{4}{3 + 2x}$.

   a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Differenzialquotienten die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(\, x_o \,/\, f(x_o)\,)$.

   b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die den Graphen von f im Punkt $P(-1\,/\ldots)$ senkrecht schneidet.

3. Bestimmen Sie von der Funktion f mit $f(x) = 0{,}3x^4 - 1{,}6x^3 + 2{,}4x^2$

   alle Hoch–, Tief – und Terrassenpunkte.

   Begründen Sie dabei geeignet, warum es sich um Hoch-, Tief- bzw. Terrassenpunkte handelt.

4. Lösen Sie diese Aufgabe auf dem Arbeitsblatt!

	Aufgabe	1a	b	c	d	2a	2b	3	4	∑
	Punkte	4	6	4	3	6	4	8	6	41

Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * Mathematik m1 * 1. Klausur am 11.11.2016 * Gruppe B

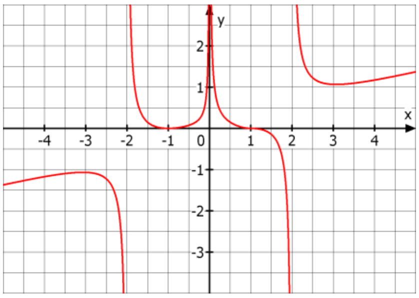
1. Die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{4x^3 - 16x}$ soll untersucht werden.

   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und alle Nullstellen von f.

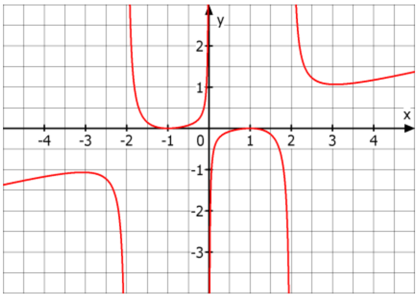
   b) Untersuchen Sie f an den Definitionslücken.

   c) Zeigen Sie, dass f für $x \to \pm\infty$ eine schräg liegende Asymptote besitzt und bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung.

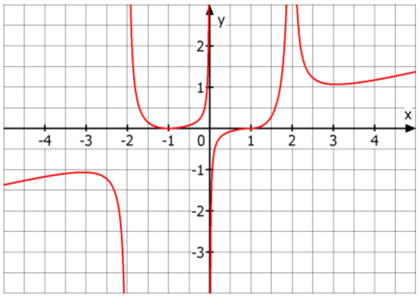
   d) Kann einer der drei abgebildeten Graphen zur Funktion f gehören?
   Begründen Sie, welche Graphen nicht in Frage kommen!



Graph 1



Graph 2



Graph 3

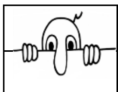
2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{2}{1+3x}$.

   a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Differenzialquotienten die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(\, x_o / f(x_o)\,)$.

   b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die den Graphen von f im Punkt P(1 /…) senkrecht schneidet.

3. Bestimmen Sie von der Funktion f mit $f(x) = 0{,}3x^4 + 1{,}6x^3 + 2{,}4x^2$
   alle Hoch–, Tief – und Terrassenpunkte.
   Begründen Sie dabei geeignet, warum es sich um Hoch-, Tief- bzw. Terrassenpunkte handelt.

4. Lösen Sie diese Aufgabe auf dem Arbeitsblatt!

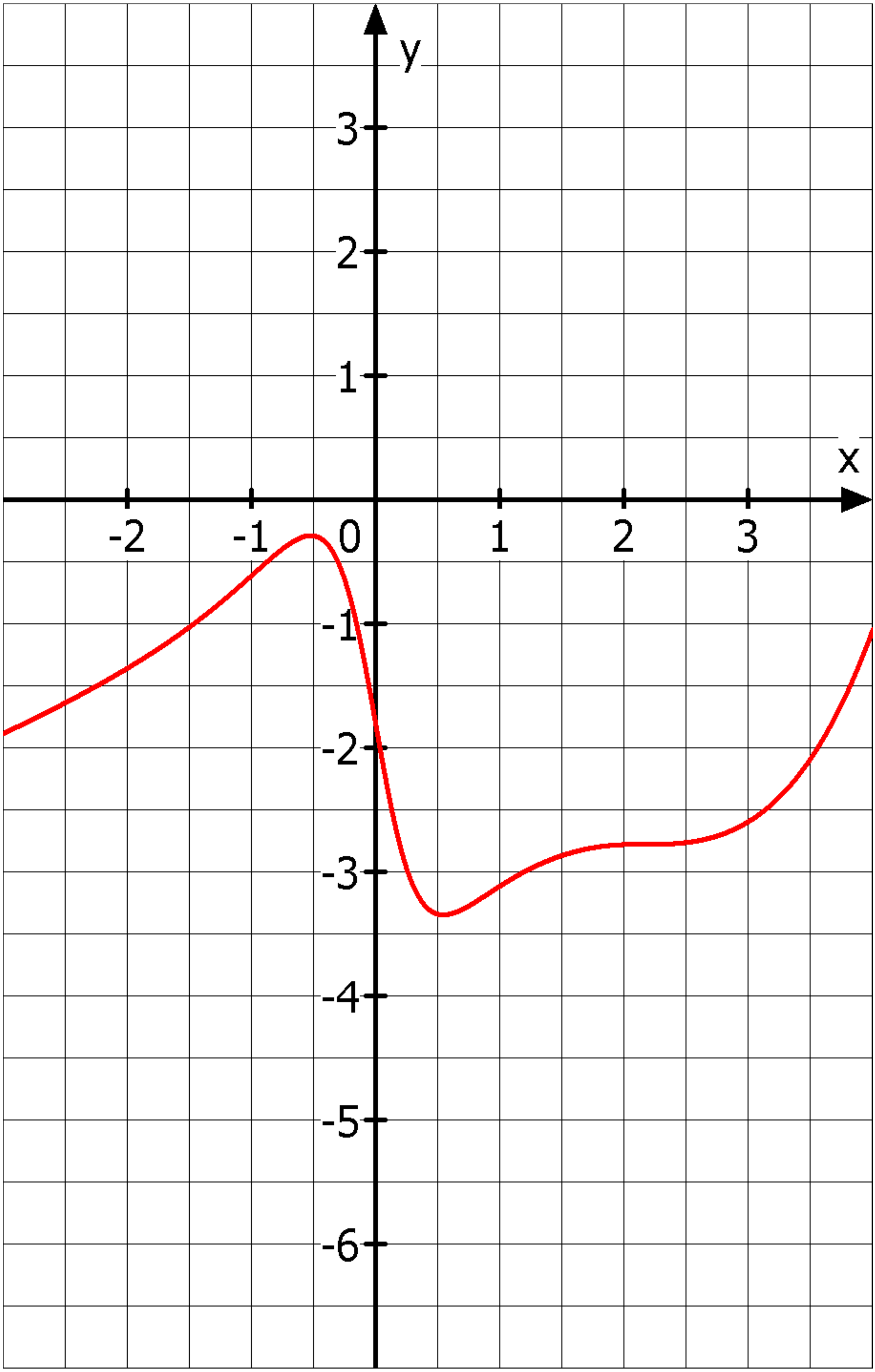
	Aufgabe	1a	b	c	d	2a	2b	3	4	$\sum$
	Punkte	4	6	4	3	6	4	8	6	41

Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * Mathematik m1 * 1. Klausur am 11.11.2016 * Arbeitsblatt

Name: …………………………………………

4. Das Bild zeigt den Graphen einer Funktion f. Tragen Sie möglichst genau den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion f´(x) in das Bild ein!



Q11 * Mathematik m1 * 1. Klausur am 11.11.2016 * Lösung * Gruppe A

1. a) $2x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow 2x\cdot(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow 2x\cdot(x-2)\cdot(x+2) = 0$ also $D = R\setminus\{0;-2;\,2\}$

NSt.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\cdot(x+1)^2 = 0$

Doppelte Nullstellen bei $x_1 = 1$ und bei $x_2 = -1$.

b) $$\lim_{\substack{> \\ x\to -2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to -2 \\ <}} \frac{x^4-2x^2+1}{2x^3-8x} = \lim_{\substack{> \\ x\to -2 \\ <}} \frac{(x^2-1)^2}{2\cdot x\cdot(x-2)\cdot(x+2)} = \text{"}\frac{9}{-4\cdot(-4)\cdot(\pm 0)}\text{"} = \pm\infty$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 2 \\ <}} \frac{x^4-2x^2+1}{2x^3-8x} = \lim_{\substack{> \\ x\to 2 \\ <}} \frac{(x^2-1)^2}{2\cdot x\cdot(x-2)\cdot(x+2)} = \text{"}\frac{9}{4\cdot(\pm 0)\cdot 4}\text{"} = \pm\infty$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0 \\ <}} \frac{x^4-2x^2+1}{2x^3-8x} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0 \\ <}} \frac{(x^2-1)^2}{2\cdot x\cdot(x-2)\cdot(x+2)} = \text{"}\frac{1}{2\cdot(\pm 0)\cdot(-2)\cdot 2}\text{"} = \mp\infty$$

c) $$(x^4 - 2x^2 + 1) : (2x^3 - 8x) = \frac{1}{2}x + \frac{2x^2+1}{2x^3-8x}$$

$$\frac{-(x^4-4x^2)}{2x^2+1} \qquad \text{und wegen} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+1}{2x^3-8x} = \pm 0$$

ist damit $y = \frac{1}{2}x$ die Gleichung der schrägliegenden Asymptote für $x \to \pm\infty$.

d) Graph 2 scheidet aus, da f bei $x_o = 0$ einen Pol mit Vorzeichenwechsel hat.
Graph 3 scheidet aus, da f bei $x_3 = 2$ einen Pol mit Vorzeichenwechsel hat.
Graph 1 erfüllt alle Anforderungen an Asymptoten und Nullstellen und ist damit möglich.

2. a) $$f'(x_o) = \lim_{\substack{> \\ x\to x_o \\ <}} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{\substack{> \\ x\to x_o \\ <}} \frac{\frac{4}{3+2x} - \frac{4}{3+2x_o}}{x-x_o} = \lim_{\substack{> \\ x\to x_o \\ <}} \frac{\frac{4\cdot(3+2x_o) - 4\cdot(3+2x)}{(3+2x)\cdot(3+2x_o)}}{x-x_o} =$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to x_o \\ <}} \frac{12+8x_o-12-8x}{(3+2x)\cdot(3+2x_o)\cdot(x-x_o)} = \lim_{\substack{> \\ x\to x_o \\ <}} \frac{-8\cdot(x-x_o)}{(3+2x)\cdot(3+2x_o)\cdot(x-x_o)} =$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to x_o \\ <}} \frac{-8}{(3+2x)\cdot(3+2x_o)} = \frac{-8}{(3+2x_o)\cdot(3+2x_o)} = \frac{-8}{(3+2x_o)^2} \quad \text{also} \quad f'(x) = \frac{-8}{(3+2x)^2}$$

b) $f(-1) = \frac{4}{3-2\cdot 1} = 4$ und $m = -\frac{1}{f'(-1)} = -\frac{(3-2)^2}{-8} = \frac{1}{8}$ also $y = \frac{1}{8}x + t$ und $(-1/4)$ eingesetzt

liefert $t = 4 - \frac{1}{8}\cdot(-1) = 4 + \frac{1}{8} = \frac{33}{8}$ also lautet die Geradengleichung $y = \frac{1}{8}x + \frac{33}{8}$

3. $f(x) = 0{,}3x^4 - 1{,}6x^3 + 2{,}4x^2 \Rightarrow f'(x) = 1{,}2x^3 - 4{,}8x^2 + 4{,}8x = 1{,}2x\cdot(x^2 - 4x + 4)$

$f'(x) = 1{,}2x\cdot(x-2)^2$ und $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ (doppelte Nullstelle von f´)

x	$x<0$	$x=0$	$0<x<2$	$x=2$	$2<x$
$f'(x) = 1{,}2x\cdot(x-2)^2$	<0	0	>0	0	>0
G_f	str. monoton fallend	TIP$(0/f(0))$	str. monoton steigend	TP$(2/f(2))$	str. monoton steigend

$f(x) = 0{,}3x^4 + 1{,}6x^3 + 2{,}4x^2$ und damit $f(0) = 0$ und

$f(2) = 0{,}3\cdot 16 - 1{,}6\cdot 8 + 2{,}4\cdot 4 = 4{,}8 - 12{,}8 + 9{,}6 = 14{,}4 - 12{,}8 = 1{,}6$

Terrassenpunkt $(2/1{,}6)$ und Tiefpunkt $(0/0)$

Q11 * Mathematik m1 * 1. Klausur am 11.11.2016 * Lösung * Gruppe B

1. a) $4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow 4x\cdot(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow 4x\cdot(x-2)\cdot(x+2) = 0$ also $D = R\setminus\{0;-2;\,2\}$

NSt.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\cdot(x+1)^2 = 0$

Doppelte Nullstellen bei $x_1 = 1$ und bei $x_2 = -1$.

b) $$\lim_{x\overset{>}{\underset{<}{\to}} -2} f(x) = \lim_{x\overset{>}{\underset{<}{\to}} -2} \frac{x^4-2x^2+1}{4x^3-16x} = \lim_{x\overset{>}{\underset{<}{\to}} -2} \frac{(x^2-1)^2}{4\cdot x\cdot(x-2)\cdot(x+2)} = \text{"}\frac{9}{-8\cdot(-4)\cdot(\pm 0)}\text{"} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\underset{<}{\to}} 2} f(x) = \lim_{x\overset{>}{\underset{<}{\to}} 2} \frac{x^4-2x^2+1}{4x^3-16x} = \lim_{x\overset{>}{\underset{<}{\to}} 2} \frac{(x^2-1)^2}{4\cdot x\cdot(x-2)\cdot(x+2)} = \text{"}\frac{9}{8\cdot(\pm 0)\cdot 4}\text{"} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\underset{<}{\to}} 0} f(x) = \lim_{x\overset{>}{\underset{<}{\to}} 0} \frac{x^4-2x^2+1}{4x^3-16x} = \lim_{x\overset{>}{\underset{<}{\to}} 0} \frac{(x^2-1)^2}{4\cdot x\cdot(x-2)\cdot(x+2)} = \text{"}\frac{1}{4\cdot(\pm 0)\cdot(-2)\cdot 2}\text{"} = \mp\infty$$

c) $$(x^4 - 2x^2 + 1) : (4x^3 - 16x) = \frac{1}{4}x + \frac{2x^2+1}{4x^3-16x}$$

$$\frac{-(x^4-4x^2)}{2x^2+1}$$ und wegen $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+1}{4x^3-16x} = \pm 0$$

ist damit $y = \frac{1}{4}x$ die Gleichung der schrägliegenden Asymptote für $x\to\pm\infty$.

d) Graph 1 scheidet aus, da f bei $x_o = 0$ einen Pol mit Vorzeichenwechsel hat.
Graph 3 scheidet aus, da f bei $x_3 = 2$ einen Pol mit Vorzeichenwechsel hat.
Graph 2 erfüllt alle Anforderungen an Asymptoten und Nullstellen und ist damit möglich.

2. a) $$f'(x_o) = \lim_{x\overset{>}{\underset{<}{\to}} x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\overset{>}{\underset{<}{\to}} x_o}\frac{\frac{2}{1+3x}-\frac{2}{1+3x_o}}{x-x_o} = \lim_{x\overset{>}{\underset{<}{\to}} x_o}\frac{\frac{2\cdot(1+3x_o)-2\cdot(1+3x)}{(1+3x)\cdot(1+3x_o)}}{x-x_o} =$$

$$\lim_{x\overset{>}{\underset{<}{\to}} x_o}\frac{2+6x_o-2-6x}{(1+3x)\cdot(1+3x_o)\cdot(x-x_o)} = \lim_{x\overset{>}{\underset{<}{\to}} x_o}\frac{-6\cdot(x-x_o)}{(1+3x)\cdot(1+3x_o)\cdot(x-x_o)} =$$

$$\lim_{x\overset{>}{\underset{<}{\to}} x_o}\frac{-6}{(1+3x)\cdot(1+3x_o)} = \frac{-6}{(1+3x_o)\cdot(1+3x_o)} = \frac{-6}{(1+3x_o)^2}$$ also $$f'(x) = \frac{-6}{(1+3x)^2}$$

b) $f(1) = \frac{2}{1+3\cdot 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ und $m = -\frac{1}{f'(1)} = -\frac{4^2}{-6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$ also $y = \frac{8}{3}x + t$; $(1/\frac{1}{2})$ eingesetzt

liefert $t = \frac{1}{2} - \frac{8}{3} = \frac{3-16}{6} = -\frac{13}{6}$ also lautet die Geradengleichung $y = \frac{8}{3}x - \frac{13}{6}$

3. $f(x) = 0{,}3x^4 + 1{,}6x^3 + 2{,}4x^2 \Rightarrow f'(x) = 1{,}2x^3 + 4{,}8x^2 + 4{,}8x = 1{,}2x\cdot(x^2+4x+4)$

$f'(x) = 1{,}2x\cdot(x+2)^2$ und $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = -2$ (doppelte Nullstelle von f´)

x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
$f'(x) = 1{,}2x\cdot(x+2)^2$	< 0	0	< 0	0	> 0
G_f	str. monoton fallend	TP$(-2/f(-2))$	str. monoton fallend	TIP(0/f(0))	str. monoton steigend

$f(x) = 0{,}3x^4 + 1{,}6x^3 + 2{,}4x^2$ und damit $f(0) = 0$ und

$f(-2) = 0{,}3\cdot 16 - 1{,}6\cdot 8 + 2{,}4\cdot 4 = 4{,}8 - 12{,}8 + 9{,}6 = 14{,}4 - 12{,}8 = 1{,}6$

Terrassenpunkt $(-2/1{,}6)$ und Tiefpunkt $(0/0)$

Q11 * Mathematik m1 * 1. Klausur am 11.11.2016 * Arbeitsblatt * Lösung