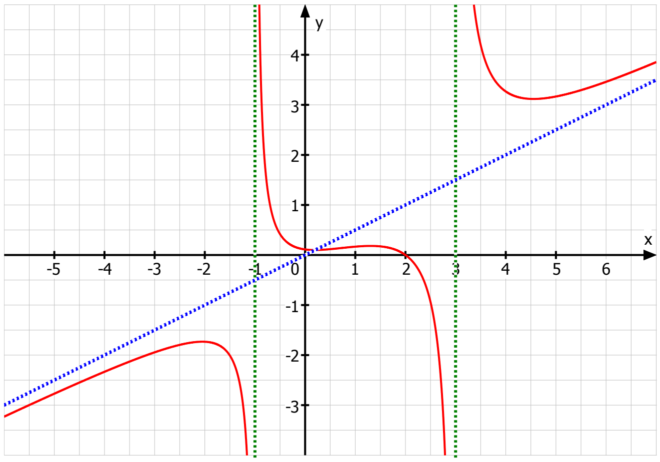
Q11 * Mathematik * 3 Übungsaufgaben zu gebrochen rationalen Funktionen

Bestimmen Sie bei Aufgabe 1 und 2 jeweils den Definitionsbereich und alle Nullstellen. Untersuchen Sie dann das Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs und skizzieren Sie den Graphen.

Aufgabe 1 $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+2} + \dfrac{3x-2}{6\cdot(x-3)}$



Lösung:

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;3\}$

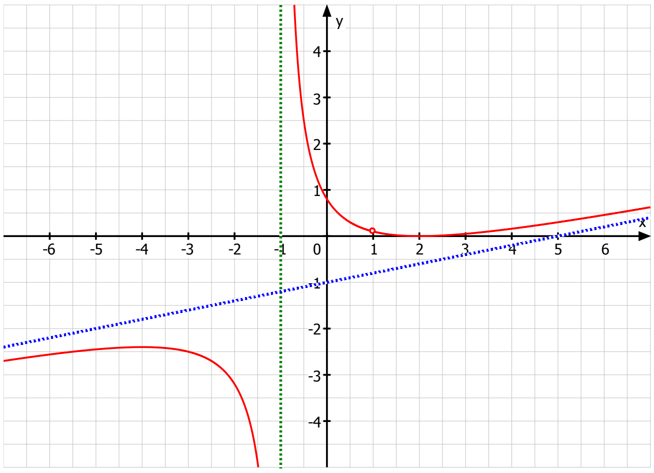
$$f(x) = \frac{3x^3-6x^2+x-2}{6\cdot(x+1)\cdot(x-3)} = \frac{3x^3-6x^2+x-2}{6x^2-12x-18}$$

$$f(x) = 0{,}5\,x + \frac{10x-2}{6\cdot(x+1)\cdot(x-3)}$$

NSt.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^3-6x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$

$(x-2)\cdot(3x^2+1)=0$; NSt. $x_1 = 2$

Aufgabe 2 $g(x) = \dfrac{(x-1)\cdot(x-2)^2}{5x^2-5}$



Lösung:

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$

$$g(x) = \frac{(x-2)^2}{5\cdot(x+1)} = \frac{x^2-4x+4}{5x+5}$$

$$g(x) = 0{,}2x - 1 + \frac{9}{5x+5}$$

NSt.: $x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 2$

(doppelte Nullstelle)

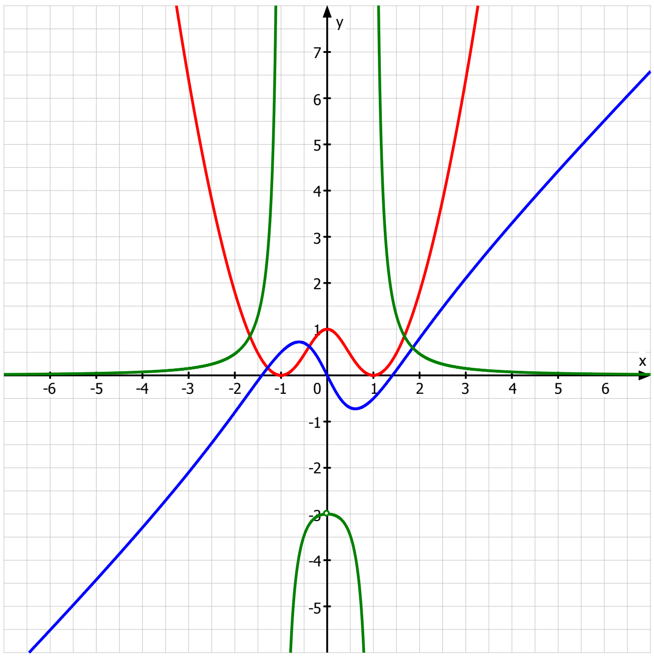
Aufgabe 3

Bestimme D und alle Nullstellen!
Prüfe auf Symmetrie!
Ordne die Graphen richtig zu!

$$h(x) = \frac{x^4-2x^2+1}{x^2+1}$$

$$k(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+1}$$

$$m(x) = \frac{x^3+3x}{x^5-x}$$



Q11 * Mathematik * 3 Übungsaufgaben zu gebrochen rationalen Funktionen
Lösungen zur Aufgabe 3

$$h(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 + 1}; \quad D_h = \mathbb{R} \;;\; h(-x) = \frac{(-x)^4 - 2(-x)^2 + 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 + 1} = h(x)$$

Der Graph G_h ist damit achsensymmetrisch zur y-Achse.

Nullstellen (NSt.): $h(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x^2 - 1)^2 = 0 \;\Leftrightarrow$
$((x-1)\cdot(x+1))^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)^2\cdot(x+1)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 1 \,;\; x_2 = -1$

(Bei beiden Nullstellen handelt es sich um so genannte doppelte Nullstellen; der Graph geht dann nicht durch die x-Achse sondern berührt sie dort nur!)

Der rote Graph passt damit zu h.

$$k(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 1} \;;\; D_k = \mathbb{R} \;;\; k(-x) = \frac{(-x)^3 - 2\cdot(-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^3 + 2x}{x^2 + 1} = -\frac{x^3 - 2x}{x^2 + 1} = -k(x)$$

Der Graph G_k ist damit punktsymmetrisch zum Ursprung.

NSt.: $k(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 - 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; x\cdot(x^2 - 2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0 \,;\; x_{2/3} = \pm\sqrt{2}$

Bei allen drei Nullstellen handelt es sich um einfache Nullstellen, d.h. der Graph G_k geht durch die x-Achse hindurch.

$$k(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 1} = x - \frac{3x}{x^2 + 1} \quad ; \quad y = x \text{ ist damit schräge Asymptote für } x \to \pm\infty$$

Der blaue Graph passt damit zu k.

$$m(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^5 - x} \quad ; \; D_m = \mathbb{R} \setminus \{0; -1; 1\} \text{ denn } x^5 - x = 0 \;\Leftrightarrow\; x\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1) = 0$$

$m(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 + 3x = 0 \;\Leftrightarrow\; x\cdot(x^2 + 3) = 0$ wegen $0 \notin D_m$ hat m keine NSt. und bei $x_1 = 0$ liegt eine hebbare Definitionslücke vor.

$$m(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^5 - x} = \frac{x\cdot(x^2 + 3)}{x\cdot(x^4 - 1)} = \frac{x^2 + 3}{x^4 - 1} = \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)} \quad \text{mit } D_m = \mathbb{R} \setminus \{0; 1; -1\}$$

$$m(-x) = \frac{(-x)^3 + 3\cdot(-x)}{(-x)^5 - (-x)} = \frac{-[x^3 + 3x]}{-[x^5 - x]} = \frac{x^3 + 3x}{x^5 - x} = m(x) \;;$$

G_m ist also achsensymmetrisch zur y-Achse.

Der grüne Graph passt damit zu m.