Q11 * Mathematik * Wichtige Lerninhalte für die 1. Klausur

- Gebrochen rationale Funktionen, insbesondere
  - Verhalten an den Definitionslücken und im Unendlichen
  - Asymptoten, auch schräg liegende
  - Polynomdivision
- Der Differentialquotient und seine geometrische Bedeutung
- Berechnung des Differentialquotienten
- Anwendungen des Differentialquotienten wie z.B.
  - Tangenten- und Normalengleichung
  - Schnittwinkel von Graphen
- Die Ableitungsfunktion (auch ihre graphische Ermittlung)
- Summen-, Produkt- und Kettenregel
- Anwendung der Ableitung, insnbesondere
  - Ermitteln von Hoch-, Tief- und Terrassenpunkten
  - „Kurvendiskussion“ bei gebrochen rationalen Funktionen

Typische Aufgaben

1. Bestimme alle Asymptoten (senkrechte, waagrechte bzw. schräg liegende) der Funktion
   $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{3x - x^2}$

2. Berechnen Sie die Steigung des Graphen von f an der Stelle $x_1 = 2$ bzw. an einer beliebigen Stelle x_o mit Hilfe des Differentialquotienten für $f(x) = 2 \cdot x^2 - 3$.

3. Unter welchem Winkel schneidet der Graph der Funktion f die x- bzw. y-Achse?
   a) $f(x) = -0{,}5x^2 + 2x - 2$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{3x + 1}$

4. Bestimmen Sie alle Hoch-, Tief- bzw. Terrassenpunkte des Graphen von f.
   $f(x) = \frac{1}{12} \cdot (3x^4 + 4x^3 - 12x^2)$

5. Führen Sie für die gebrochen rationale Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{2x + 2}$ eine „Kurvendiskussion“ durch, d.h.
   bestimmen Sie den Definitionsbereich D_f , alle Nullstellen, das Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs, schräg liegende Asymptoten, die Ableitung und alle Hoch- und Tiefpunkte des Graphen.
   Skizzieren Sie anschließend den Graphen!

Lösungen zu den typischen Aufgaben

1. $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+1}{3x-x^2}=\dfrac{x^3-2x^2+1}{x\cdot(3-x)}$; $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$ also senkrechte Asymptoten $x=0$ und $x=3$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >\\ <}}\dfrac{x^3-2x^2+1}{x\cdot(3-x)}="\dfrac{1}{\pm 0\cdot 3}"=\pm\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >\\ <}}\dfrac{x^3-2x^2+1}{x\cdot(3-x)}="\dfrac{10}{3\cdot\mp 0}"=\mp\infty$

$(x^3-2x^2+1):(-x^2+3x)=-x-1+\dfrac{3x+1}{-x^2+3x}\ \Rightarrow\ y=-x-1$ ist Asymptote für $x\to\pm\infty$

2. $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2\cdot x^2-3)-(2\cdot 2^2-3)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2\cdot x^2-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2\cdot(x-2)\cdot(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}2\cdot(2+x)=$
$=2\cdot(2+2)=8$

$f'(x_o)=\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{2\cdot x^2-3-(2\cdot x_o{}^2-3)}{x-x_o}=\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{2\cdot x^2-2x_o{}^2}{x-x_o}=\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{2\cdot(x-x_o)\cdot(x+x_o)}{x-x_o}=$
$=\lim\limits_{x\to x_o}2\cdot(x+x_o)=2\cdot(x_o+x_o)=4x_o$

3. a) $f(x)=-0,5x^2+2x-2\ \Rightarrow\ f'(x)=-x+2$

Nullstellen: $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-4x+4=0\Leftrightarrow x_{1,2}=2$ doppelte Nullstelle

$f'(2)=-2+2=0$ der Graph von f berührt die x-Achse bei $x_{1/2}=2$ („Schnittwinkel“ 0^o)

$f'(0)=2\ \Rightarrow$ Steigungswinkel $\alpha=\tan^{-1}(2)\approx 63,4^o$

Schnittwinkel mit y–Achse also $90^o-63,4^o=26,6^o$

b) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{3x+1}\ \Rightarrow\ f'(x)=\dfrac{(3x+1)\cdot 2x-(x^2-9)\cdot 3}{(3x+1)^2}=\dfrac{3x^2+2x+27}{(3x+1)^2}$

Nullstellen: $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-9=0\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 3$ und $f'(3)=\dfrac{27+6+27}{100}=0,6$

und $f'(-3)=\dfrac{27-6+27}{64}=0,75$ und $f'(0)=\dfrac{0+0+27}{1}=27$

Steigungswinkel und damit Schnittwinkel bei $x_1=3$: $\alpha=\tan^{-1}(0,6)\approx 31,0^o$

Steigungswinkel und damit Schnittwinkel bei $x_2=-3$: $\alpha=\tan^{-1}(0,75)\approx 36,9^o$

Steigungswinkel bei $x_3=0$: $\alpha=\tan^{-1}(27)\approx 87,9^o$ also Schnittwinkel mit y-Achse $2,1^o$

4. $f(x)=\dfrac{1}{12}\cdot(3x^4+4x^3-12x^2)\ \Rightarrow\ f'(x)=\dfrac{1}{12}\cdot(12x^3+12x^2-24x)=x\cdot(x^2+x-2)$

Horizontale Tangenten:

$f'(x)=0\Leftrightarrow x\cdot(x^2+x-2)=0\Leftrightarrow x\cdot(x-1)\cdot(x+2)=0\Leftrightarrow x_0=0$; $x_1=1$; $x_2=-2$

$y_0=f(0)=0$; $y_1=f(1)=\dfrac{1}{12}\cdot(3+4-12)=-\dfrac{5}{12}$; $y_2=f(-2)=\dfrac{48-32-48}{12}=-\dfrac{8}{3}$

x	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x=1$	$1<x$
$f'(x)=x\cdot(x-1)\cdot(x+2)$	<0	$=0$	>0	$=0$	<0	$=0$	>0

Tiefpunkt $(-2/-\frac{8}{3})$; Hochpunkt $(0/0)$; Tiefpunkt $(1/-\frac{5}{12})$;

kein Terrassenpunkt

5. $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{2x+2}=\dfrac{x\cdot(x-3)}{2\cdot(x+1)}$; $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; Nullstellen $x_1=0$; $x_2=3$; $y_1=y_2=0$

Senkrechte Asymptote bei $x_3=-1$ mit $\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -1} f(x)=\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -1}\dfrac{x\cdot(x-3)}{2\cdot(x+1)}="\dfrac{+4}{2\cdot(\pm 0)}"=\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\cdot(x-3)}{2\cdot(x+1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-3)}{2\cdot(1+\frac{1}{x})}="\frac{\pm\infty}{2}"=\pm\infty$$

Schräg liegende Asymptote $y=\dfrac{1}{2}x-2$ für $x\to\pm\infty$, denn

$$(x^2-3x):(2x+2)=\frac{1}{2}x-2+\frac{4}{2x+2}$$

$$f(x)=\frac{x^2-3x}{2x+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+2)\cdot(2x-3)-2\cdot(x^2-3x)}{(2x+2)^2}=$$

$$=\frac{4x^2-2x-6-2x^2+6x}{(2x+2)^2}=\frac{2x^2+4x-6}{(2x+2)^2}=\frac{2\cdot(x^2+2x-3)}{4\cdot(x+1)^2}=\frac{(x-1)\cdot(x+3)}{2\cdot(x+1)^2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x+3)=0 \Leftrightarrow x_4=1$; $x_5=-3$ und $y_4=-\dfrac{1}{2}$; $y_5=-\dfrac{9}{2}$

x	$x<-3$	$x=-3$	$-3<x<1$	$x=1$	$1<x$
$f'(x)=\dfrac{(x-1)\cdot(x+3)}{2\cdot(x+1)^2}$	>0	$=0$	<0	$=0$	>0

Hochpunkt $(-3/-4{,}5)$; Tiefpunkt $(1/-0{,}5)$