Q11 * Mathematik

Aufgaben zum Zusammenhang von Funktionsterm und Funktionsgraph

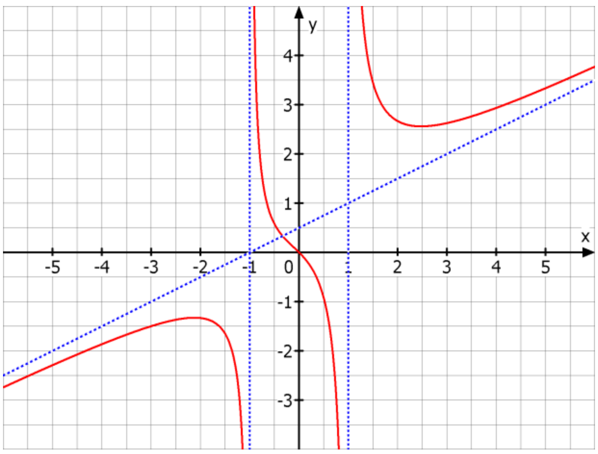
Bestimmen Sie für die vier Funktionen jeweils den Definitionsbereich und alle Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. Prüfen Sie G_f auf Symmetrie.
Untersuchen Sie das Verhalten von G_f an den Rändern des Definitionsbereichs und skizzieren Sie anschließend den Graphen.
Vergleichen Sie mit den von einem Plotter gezeichneten Bildern und ordnen Sie korrekt zu.

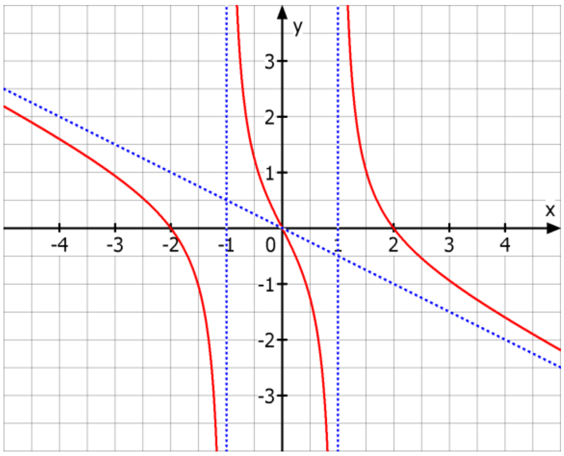
a) $f(x) = \dfrac{4x - x^3}{2x^2 - 2}$

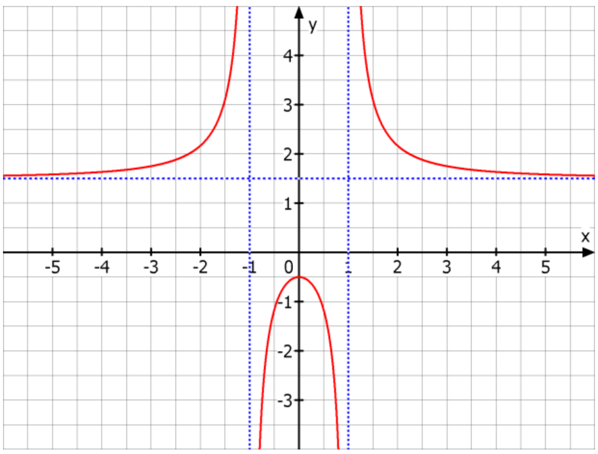
b) $f(x) = \dfrac{0{,}5x^4 + x^2}{2x^2 - 2}$

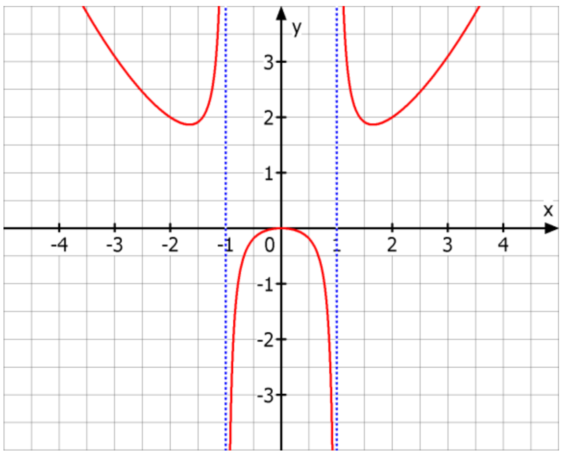
c) $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+2} + \dfrac{x}{x-1}$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+2} + \dfrac{x}{x-1}$









Aufgaben zum Zusammenhang von Funktionsterm und Funktionsgraph * Lösungen

a) $f(x) = \frac{4x - x^3}{2x^2 - 2} = \frac{x(4 - x^2)}{2(x^2-1)} = \frac{x(2-x)(2+x)}{2(x-1)(x+1)}$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$

NSt.: $x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm 2 \quad f(0) = 0$

$f(-x) = -f(x)$ Punktsymmetr.

$\lim\limits_{x \overset{>}{<} 1} f(x) = „\frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 0^{\pm} \cdot 2}" = \pm\infty \qquad \lim\limits_{x \overset{>}{<} -1} f(x) = \pm\infty$ wg. Punktsymm.

$\left(\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty\right) \qquad (-x^3 + 4x) : (2x^2 - 2) = -0{,}5x + \frac{3x}{2x^2-2}$

$\underline{-(-x^3 + x)}$

$3x$

Asymptote für $x \to \pm\infty$: $y = -0{,}5x$ wegen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3x}{2x^2-2} = 0^{\pm}$

G_f rechts oben

b) $f(x) = \frac{0{,}5x^4 + x^2}{2x^2 - 2} = \frac{0{,}5x^2(x^2+2)}{2(x-1)(x+1)}$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$

NSt. $x_1 = 0$ (doppelte NSt, d.h. x-Achse wird „berührt")

$f(-x) = f(x)$ Achsensymmetr.

$\lim\limits_{x \overset{>}{<} 1} f(x) = „\frac{0{,}5 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 0^{\pm} \cdot 2}" = \pm\infty \qquad \lim\limits_{x \overset{>}{<} -1} f(x) = \mp\infty$ Achsensymm.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim \frac{\cancel{x^2}(0{,}5x^2 + 1)}{\cancel{x^2}(2 - \frac{2}{x^2})} = „\frac{\infty}{2}" = +\infty$

keine Gerade als Asymptote für $x \to \pm\infty$ $\qquad G_f$ rechts unten

c) $f(x) = \frac{x^2}{2x+2} + \frac{x}{x-1} = \frac{x^3 - x^2 + 2x^2 + 2x}{2(x+1)(x-1)} = \frac{x \cdot (x^2 + x + 2)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{x^3 + x^2 + 2x}{2x^2 - 2}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ NSt. $x_1 = 0$ $\quad (x^2 + x + 2 \neq 0$ für alle $x \in D_f)$

Symmetrie nicht erkennbar!

$\lim\limits_{x \overset{>}{<} 1} f(x) = „\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot 0^{\pm}}" = \pm\infty \qquad \lim\limits_{x \overset{>}{<} -1} f(x) = „\frac{-1 \cdot 2}{2 \cdot 0^{\pm} \cdot (-2)}" = \pm\infty$

$(x^3 + x^2 + 2x) : (2x^2 - 2) = 0{,}5x + 0{,}5 + \frac{3x+1}{2x^2-2}$

$\underline{-(x^3 - x)}$

$x^2 + 3x$

$\underline{-(x^2 - 1)}$

$3x + 1$

Asymptote für $x \to \pm\infty$: $y = 0{,}5x + 0{,}5$

wegen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3x+1}{2x^2-2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x}(3 + \frac{1}{x})}{\cancel{x}(2x - \frac{2}{x})} = „\frac{3}{\pm\infty}" = \pm 0$

G_f links oben

d) $f(x) = \frac{x-1}{2x+2} + \frac{x}{x-1} = \frac{x^2-2x+1+2x^2+2x}{2(x+1)(x-1)} =$

$= \frac{3x^2+1}{2x^2-2}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

NSt.: keine $\qquad f(-x) = f(x)$ Achsensymmetrie

$\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 1} f(x) = „\frac{3+1}{2 \cdot 2 \cdot 0^{\pm}}" = \pm\infty$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -1} f(x) = \mp\infty$ (Achsensymmetrie)

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2(3+\frac{1}{x^2})}{x^2(2-\frac{2}{x^2})} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

waagerechte Asymptote $y = 1{,}5$ für $x \to \pm\infty$

G_f liegt unten