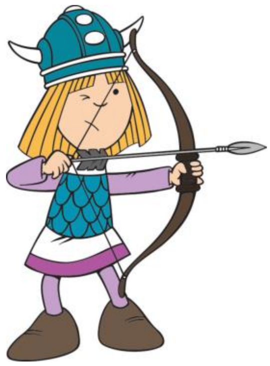
Q11 * Mathematik * Wichtige Anwendungen des Skalarprodukts



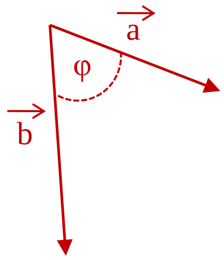
Skalarprodukt zweier Vektoren:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Länge (Betrag) eines Vektors:

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}$$

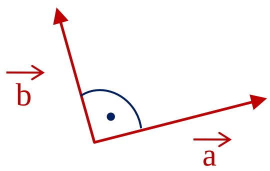
Winkel zwischen zwei Vektoren



$$\vec{a} \circ \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi \quad \text{also} \quad \cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

$$\text{und} \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}\right)$$

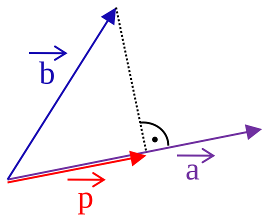
Orthogonale Vektoren



$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \circ \vec{b} = 0$$

$$\text{z.B.} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Für die **Projektion** $\vec{p}$ eines Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$



gilt:

$$\vec{p} = \frac{\vec{b} \circ \vec{a}}{\left|\vec{a}\right|^2} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{b} \circ \vec{a}}{\vec{a} \circ \vec{a}} \cdot \vec{a}$$

Eine Winkelhalbierende zu zwei Vektoren lautet

$$\vec{w} = \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} + \frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$