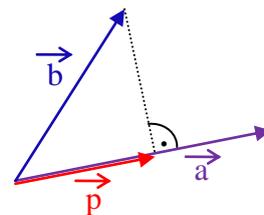


Q11 * Mathematik * Aufgaben zum Skalarprodukt

Merke: Für die **Projektion** \vec{p} eines Vektors \vec{b} auf den Vektor \vec{a}

gilt:

$$\vec{p} = \frac{\vec{b} \circ \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{b} \circ \vec{a}}{\vec{a} \circ \vec{a}} \cdot \vec{a}$$



- Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit $A(1/-2/3)$, $B(5/2/1)$ und $C(1/1/0)$.
- Gegeben sind die Punkte $A(1/-2/3)$, $B(2/-2/4)$ und $C(4/-6/4)$.
 - Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C eine Ebene E festlegen.
 - Finden Sie einen Punkt P, der von dieser Ebene den Abstand 6 hat.
- Gegeben sind die Punkte $A(1/-2/3)$, $B(2/2/-5)$ und $P(4/-5/12)$. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden AB.
- Gegeben sind die Punkte $A(1/-2/3)$ und $B(5/4/-9)$.
 - Finden Sie einen Punkt C so, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig mit Basis [AB] ist.
 - Finden Sie einen Punkt D so, dass das Dreieck ABD den Flächeninhalt $21 \cdot \sqrt{5}$ besitzt.
- Gegeben sind die Punkte $A(1/-2/3)$, $B(0/2/11)$ und $C(3/0/2)$.
 - Berechnen Sie den Winkel $\sphericalangle BAC$.
 - Finden Sie einen Punkt P ($P \neq A$), der auf der Winkelhalbierenden dieses Winkels $\sphericalangle BAC$ liegt.
- Gegeben sind die Punkte $A(0/0/0)$, $B(2/6/0)$, $C(7/1/0)$ und $S(3/2/5)$.
 - Zeichnen Sie ein sauberes Schrägbild der Pyramide ABCS. (Platzbedarf: $\begin{matrix} & & 4 & & \\ & & 4 & 0 & 6 & \\ & & & & 4 & \end{matrix}$)
 - Unter welchen Winkeln laufen die drei Kanten der Pyramide in der Spitze S zusammen?
 - Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks CBS.
 - Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
 - Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCS.

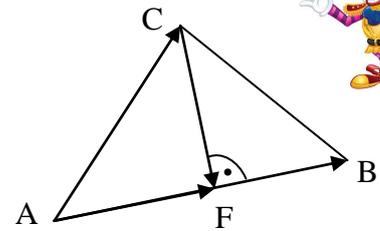


Q11 * Mathematik * Aufgaben zum Skalarprodukt * Lösungen



$$1. \vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix};$$

F ist der Fußpunkt des Lots von C auf [AB]

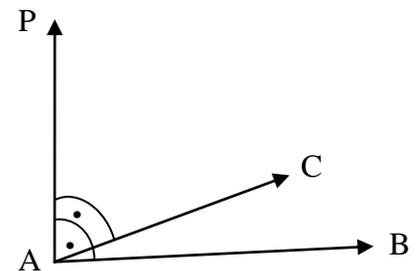


$$\vec{AF} = \frac{\vec{AB} \circ \vec{AC}}{\vec{AB} \circ \vec{AB}} \cdot \vec{AB} = \frac{0+12+6}{16+16+4} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \vec{F} = \vec{AF} + \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ also } F(3/0/2).$$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \vec{AB} \cdot \vec{CF} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16+16+4} \cdot \sqrt{(3-1)^2 + (0-1)^2 + (2-0)^2} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$$

$$2. a) \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{AB} \neq r \cdot \vec{AC} \text{ für jedes } r \in \mathbb{R}$$

\Rightarrow A, B und C spannen eine Ebene auf.



b) Wähle P so, dass $\vec{AP} \perp \vec{AB}$ und $\vec{AP} \perp \vec{AC}$ gilt.

$$\text{für } \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ n_2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ gilt } \vec{n} \perp \vec{AB}; \vec{n} \perp \vec{AC} \Leftrightarrow 3 \cdot 1 - 4 \cdot n_2 + 1 \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow n_2 = \frac{1}{2} \text{ also } \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

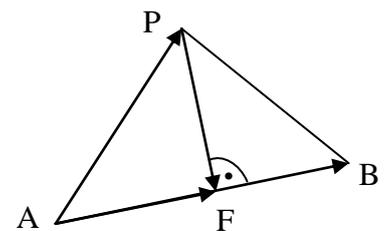
$$\vec{AP} = 6 \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{6}{\sqrt{2,25}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{P} = \vec{AP} + \vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ also } P(5/0/-1)$$

3. Berechne die Projektion \vec{AF} von \vec{AP} auf \vec{AB} :

$$\vec{AP} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}; \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ und damit } d(P; AB) = PF$$

$$\vec{AF} = \frac{\vec{AP} \circ \vec{AB}}{\vec{AB} \circ \vec{AB}} \cdot \vec{AB} = \frac{3-12-72}{1+16+64} \cdot \vec{AB} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

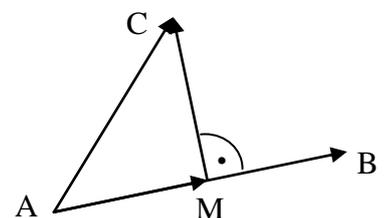
$$\vec{F} = \vec{AF} + \vec{A} = \begin{pmatrix} -1+1 \\ -4-2 \\ 8+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ also } F(0/-6/11) \text{ und } d(P; AB) = PF = \sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2} = 3 \cdot \sqrt{2}$$



4. a) M ist der Mittelpunkt der Strecke [AB]; wähle dann $\vec{MC} \perp \vec{AB}$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}; \vec{M} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \text{ z.B. } \vec{MC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \vec{AB}$$

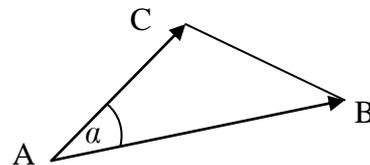
$$\vec{C} = \vec{MC} + \vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ also } C(3/3/-2)$$



b) Es muss gelten $21 \cdot \sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{MD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{4+9+36} \cdot \overline{MD} = 7 \cdot \overline{MD} \Rightarrow \overline{MD} = 3 \cdot \sqrt{5}$

z.B. $\overline{MD} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{0+2^2+1^2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{D} = \overline{MD} + \vec{M} = \begin{pmatrix} 0+3 \\ 6+1 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ also $D(3/7/0)$

5. a) $\overline{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\overline{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;



$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AB} \circ \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{-2+8-8}{\sqrt{1+16+64} \cdot \sqrt{4+4+1}} = \frac{-2}{27} \Rightarrow \alpha = 94,248...^\circ \approx 94,2^\circ$

b) Für einen Punkt P auf der Winkelhalbierenden gilt

$\overline{AP} = r \cdot \left(\frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} + \frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|} \right)$ mit $r \in \mathbb{R}$; also z.B. $\overline{AP} = 9 \cdot \left(\frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} + \frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|} \right) =$
 $= 9 \cdot \left(\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{P} = \overline{AP} + \vec{A} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 10-2 \\ 5+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$ also $P(4/8/8)$

6. b) $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overline{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overline{CB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\overline{SA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\overline{SB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\overline{SC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$;

$\cos(\sphericalangle CSB) = \frac{\overline{SC} \circ \overline{SB}}{|\overline{SC}| \cdot |\overline{SB}|} = \frac{-4-4+25}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{42}} = \frac{17}{42} \Rightarrow$

$\sphericalangle CSB \approx 66,1^\circ$; entsprechend $\sphericalangle BSA \approx 60,0^\circ$ und $\sphericalangle ASC \approx 67,9^\circ$

c) Das Dreieck CBS ist gleichschenkelig, denn es gilt $\overline{SC} = \overline{SB} = \sqrt{42}$

Für den Mittelpunkt M_{CB} von [CB] gilt

$M_{CB} = (4,5/3,5/0)$ und $\overline{SM}_{CB} = \sqrt{(3-4,5)^2 + (2-3,5)^2 + 5^2} = \sqrt{29,5}$ also

$A_{\Delta CBS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CB} \cdot \overline{SM}_{CB} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{29,5} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{59}$

d) Für den Fußpunkt F des Lots von B auf AC gilt:

$\overline{AF} = \frac{\overline{AB} \circ \overline{AC}}{\overline{AC} \circ \overline{AC}} \cdot \overline{AC} = \frac{14+6+0}{49+1+0} \cdot \overline{AC} = \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,8 \\ 0,4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{F} = \overline{AF} + \vec{A} = \begin{pmatrix} 2,8 \\ 0,4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BF} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{(2-2,8)^2 + (6-0,4)^2} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = 20$

e) Da S den Abstand $h = 5$ von der x_1-x_2 -Ebene hat, gilt für das Volumen der Pyramide

$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 5 = \frac{100}{3}$.

