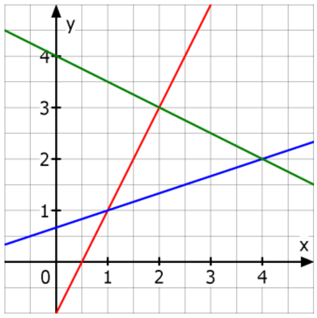
# Q11 * Mathematik * Schnittwinkel bei Graphen

1. Gegeben sind die drei Geraden mit

   $f(x)=2x-1$, $g(x)=\frac{1}{3}(x+2)$ und $h(x)=-0{,}5x+4$.

   a) Bestimmen Sie die drei Schnittpunkte der Geraden

   b) Bestimmen Sie die jeweils den Schnittwinkel.

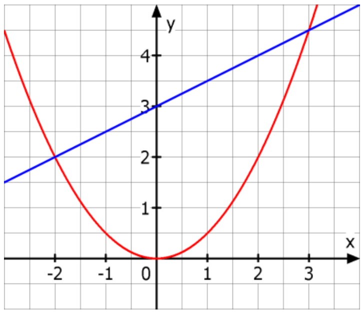


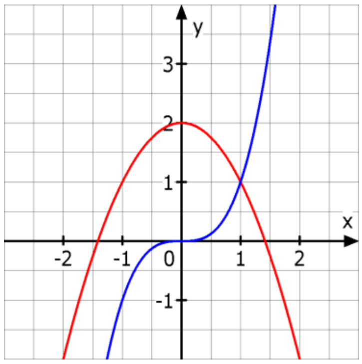
2. Eine Parabel und eine Gerade sind gegeben durch

   $f(x)=0{,}5x^2$ und $g(x)=0{,}5x+3$.

   a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Graphen.

   b) Bestimmen Sie die jeweiligen Schnittwinkel.





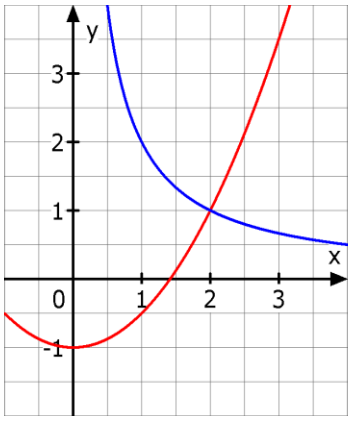
3. Gegeben sind die beiden Funktionen f und g mit

   $f(x)=2-x^2$ und $g(x)=x^3$.

   a) Begründen Sie, dass sich die beiden Graphen nur in einem Punkt schneiden.

   b) Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$.

   c) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Graphen.



4. Gegeben sind die beiden Funktionen f und g mit

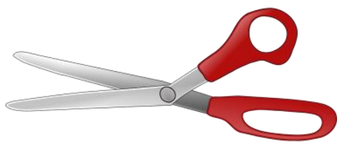
   $f(x) = 0{,}5x^2 - 1$ und $g(x) = \frac{2}{x}$.

   a) Zeigen Sie, dass sich die beiden Graphen im Punkt S(2/1) schneiden.

   b) Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$.

   c) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Graphen beim Punkt S.

5. Zwei Geraden mit den Steigungen $m_1$ und $m_2$ schneiden sich genau dann rechtwinklig, wenn $m_1 \cdot m_2 = -1$ gilt.
   Begründen Sie diese Aussage!



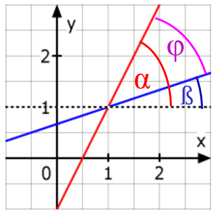
# Q11 * Mathematik * Schnittwinkel bei Graphen * Lösungen

1.a) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 2x-1=\frac{1}{3}(x+2) \Leftrightarrow 6x-3=x+2 \Leftrightarrow 5x=5 \Leftrightarrow x=1\,;f(1)=1$ also $S_1(1/1)$

$f(x)=h(x) \Leftrightarrow 2x-1=-0{,}5x+4 \Leftrightarrow 2{,}5x=5 \Leftrightarrow x=2\,;\ f(2)=3$ also $S_2(2/3)$

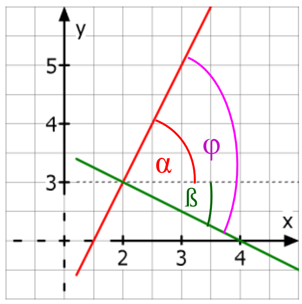
$g(x)=h(x) \Leftrightarrow \frac{1}{3}(x+2)=-0{,}5x+4 \Leftrightarrow x+2=-1{,}5x+12 \Leftrightarrow 2{,}5x=10 \Leftrightarrow x=4;\ S_3(4/2)$

b) $S_1(1/1)$ Steigungen $m_1=2\,;\quad m_2=\frac{1}{3}$




$\tan\alpha=2 \Rightarrow \color{red}{\alpha=\tan^{-1}(2)\approx 63{,}4^\circ}$ ; $\color{blue}{\tan\beta=\frac{1}{3} \Rightarrow \beta\approx 18{,}4^\circ}$

Schnittwinkel $\color{magenta}{\varphi=\alpha-\beta=45{,}0^\circ}$




$S_2(2/3)$ Steigungen $m_1=2\,;\quad m_2=-0{,}5$

$\tan\alpha=2 \Rightarrow \color{red}{\alpha=\tan^{-1}(2)\approx 63{,}4^\circ}$ ; $\color{green}{\tan\beta=-0{,}5 \Rightarrow \beta\approx -26{,}6^\circ}$

Schnittwinkel $\color{magenta}{\varphi=\alpha-\beta=63{,}4^\circ-(-26{,}6^\circ)=90{,}0^\circ}$

analog $S_3(4/2)$ Steigungen $m_1=\frac{1}{3}\,;\quad m_2=-0{,}5$

$\tan\alpha=2 \Rightarrow \color{red}{\alpha=\tan^{-1}(\frac{1}{3})\approx 18{,}4^\circ}$ ; $\color{green}{\tan\beta=-0{,}5 \Rightarrow \beta\approx -26{,}6^\circ}$

Schnittwinkel $\color{magenta}{\varphi=\alpha-\beta=18{,}4^\circ-(-26{,}6^\circ)=45{,}0^\circ}$

2.a) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 0{,}5x^2=0{,}5x-3 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow (x+2)\cdot(x-3)=0$ also $x_1=-2\,;\ x_2=3$

also $S_1(-2/2)$ und $S_2(3/4{,}5)$ ;

b) es gilt $g'(x)=0{,}5$ und $f'(x)=x$, denn

$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{0{,}5x^2-0{,}5x_o^{\,2}}{(x-x_o)}=\lim_{x\to x_o}\frac{0{,}5\cdot(x-x_o)\cdot(x+x_o)}{(x-x_o)}=0{,}5\cdot(x_o+x_o)=x_o$$

$S_1(-2/2)$ Steigungen $m_1=-2\,;\ m_2=0{,}5\,;$

$\tan\alpha=-2 \Rightarrow \alpha=\tan^{-1}(-2)\approx -63{,}4^\circ$ ; $\tan\beta=0{,}5 \Rightarrow \beta\approx 26{,}6^\circ$

Schnittwinkel $\varphi=|\alpha|+\beta=63{,}4^\circ+26{,}6^\circ=90{,}0^\circ$

$S_2(3/4{,}5)$ Steigungen $m_1=3\,;\ m_2=0{,}5\,;$

$\tan\alpha=3 \Rightarrow \alpha=\tan^{-1}(3)\approx 71{,}6^\circ$ ; $\tan\beta=0{,}5 \Rightarrow \beta\approx 26{,}6^\circ$

Schnittwinkel $\varphi=\alpha-\beta=71{,}6^\circ-26{,}6^\circ=45{,}0^\circ$

3.a) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^3+x^2-2=0$ und $x_1=1$ ist eine Lösung dieser Gleichung.

die Polynomdivision liefert $(x^3+x^2-2):(x-1)=x^2+2x+2$ also

$x^3+x^2-2=0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot()=0 \Leftrightarrow x_1=1$ oder $x^2+2x+2=0$

aber wegen $D=2^2-4\cdot1\cdot2<0$ hat $x^2+2x+2=0$ keine Lösung und

$x_1=1$ ist einziger Schnittpunkt der beiden Graphen.

b) $f'(x_o) = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{2-x^2-(2-x_o{}^2)}{(x-x_o)} = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{-(x^2-x_o{}^2)}{(x-x_o)} = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{-(x-x_o)\cdot(x+x_o)}{(x-x_o)} = -(x_o+x_o) =$

$= -2x_o$

$g'(x_o) = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{x^3-x_o{}^3}{(x-x_o)} = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{(x-x_o)\cdot(x^2+x\cdot x_o+x_o{}^2)}{(x-x_o)} =$

$\lim\limits_{x\to x_o} x^2+x\cdot x_o+x_o{}^2 = x_o{}^2+x_o\cdot x_o+x_o{}^2 = 3x_o{}^2$

also $f'(x) = -2x$ und $g'(x) = 3x^2$

c) Im Schnittpunkt $S(1/1)$ Steigungen $m_1 = f'(1) = -2\cdot 1 = -2$ und $m_2 = g'(1) = 3\cdot 1^2 = 3$;

$\tan\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(-2) \approx -63{,}4^o$; $\tan\beta = 3 \Rightarrow \beta = \tan^{-1}(3) \approx 71{,}6^o$

$\varphi_1 = |\alpha| + \beta = 63{,}4^o + 71{,}6^o = 135{,}0^o$

Schnittwinkel $\varphi = 180^o - \varphi_1 = 45{,}0^o$

4.a) $f(2) = 0{,}5\cdot 2^2 - 1 = 2-1 = 1$ und $g(2) = \dfrac{2}{2} = 1$ also $f(2) = 1 = g(2)$

b) $f'(x_o) = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{0{,}5\cdot x^2 - 1 - (0{,}5\cdot x_o{}^2 - 1)}{(x-x_o)} = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{0{,}5\cdot(x^2-x_o{}^2)}{(x-x_o)} = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{0{,}5\cdot(x-x_o)\cdot(x+x_o)}{(x-x_o)} =$

$0{,}5\cdot(x_o+x_o) = x_o$

$g'(x_o) = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{\frac{2}{x}-\frac{2}{x_o}}{(x-x_o)} = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{\frac{2x_o-2x}{x\cdot x_o}}{(x-x_o)} = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{-2\cdot(x-x_o)}{x\cdot x_o\cdot(x-x_o)} = \dfrac{-2}{x_o\cdot x_o} = -\dfrac{2}{x_o{}^2}$

also $f'(x) = x$ und $g'(x) = -\dfrac{2}{x^2}$

c) Im Schnittpunkt $S(2/1)$ Steigungen $m_1 = f'(2) = 2\cdot 1 = 2$ und $m_2 = g'(2) = -\dfrac{2}{2^2} = -0{,}5$

$\tan\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(2) \approx 63{,}4^o$; $\tan\beta = -0{,}5 \Rightarrow \beta = \tan^{-1}(-0{,}5) \approx -26{,}6^o$

$\varphi = \alpha - \beta = 63{,}4^o + 26{,}6^o = 90{,}0^o$

5. $m_1 = \dfrac{b}{a}$ und $m_2 = -\dfrac{1}{m_1} = -\dfrac{a}{b}$

z.B. $a = 2$ und $b = 1$ (siehe Bild!)

$\dfrac{b}{a} = \tan\alpha$ und $\dfrac{a}{b} = \tan ß$

und $\alpha + ß = 90^o$

Der Schnittwinkel $\varphi$ ist aber genau $\alpha + ß$.

Also $\varphi = \alpha + ß = 90^o$