Q11 * Mathematik * Aufgabe zur Ableitung zum Üben

Schnittwinkelberechnung

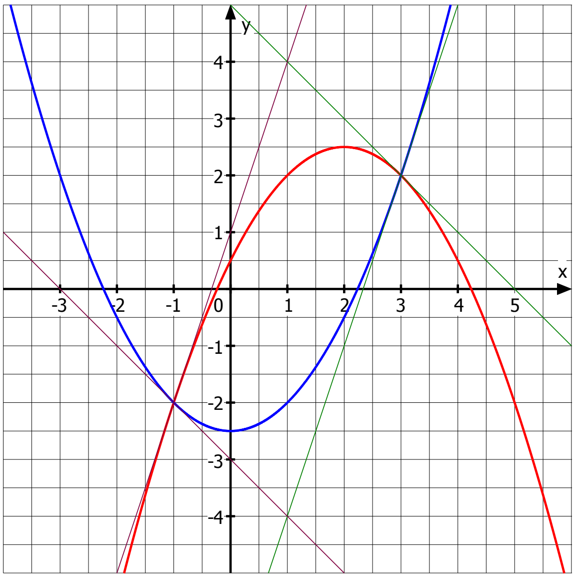
Gegeben sind die beiden Funktionen f und g mit

$f(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 0{,}5$

und $g(x) = 0{,}5x^2 - 2{,}5$

Berechnen Sie die beiden Schnittpunkte der Graphen (siehe Bild) und bestimmen Sie die zugehörigen Schnittwinkel.

Geben Sie auch die jeweiligen Tangentengleichungen an.



Q11 * Mathematik * Aufgabe zur Ableitung zum Üben

Schnittwinkelberechnung

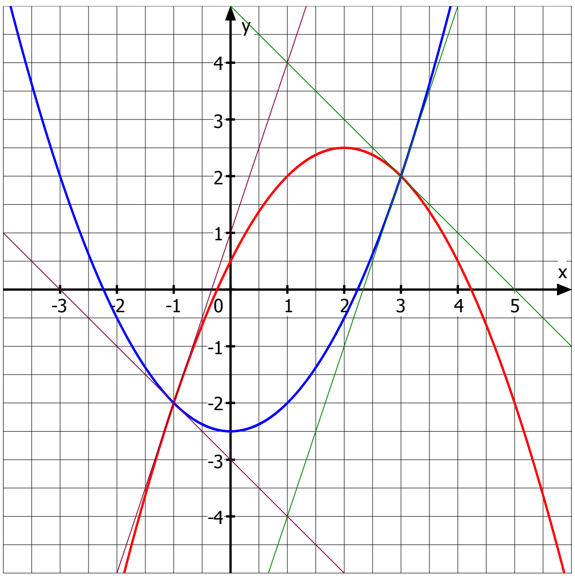
Gegeben sind die beiden Funktionen f und g mit

$f(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 0{,}5$

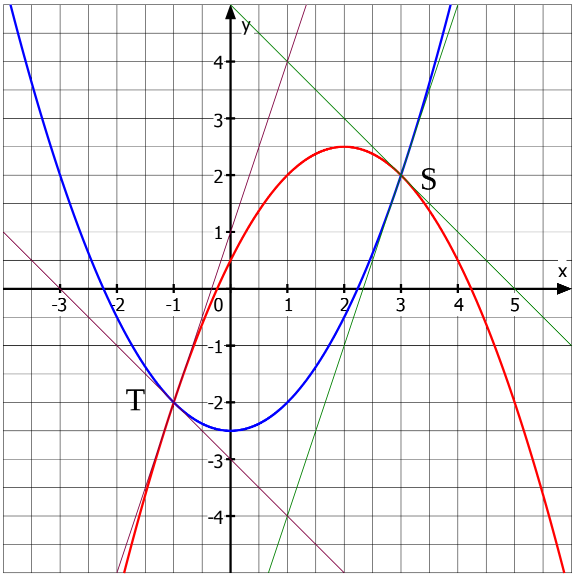
und $g(x) = 0{,}5x^2 - 2{,}5$

Berechnen Sie die beiden Schnittpunkte der Graphen (siehe Bild) und bestimmen Sie die zugehörigen Schnittwinkel.

Geben Sie auch die jeweiligen Tangentengleichungen an.



Q11 * Mathematik * Aufgabe zur Ableitung zum Üben * Lösung



Schnittpunkte der beiden Graphen:

$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow$

$-0,5x^2 + 2x + 0,5 = 0,5x^2 - 2,5 \quad \Leftrightarrow$

$0 = x^2 - 2x - 3 \quad \Leftrightarrow$

$x_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left(+2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)} \right) = \frac{2 \pm 4}{2}$

$x_1 = 3 \;;\;\; y_1 = g(3) = 4,5 - 2,5 = 2 \;;\;\; S(3/2)$

$x_2 = -1 \;;\;\; y_2 = g(3) = 0,5 - 2,5 = -2 \;;\;\; T(-1/-2)$

Schnittpunkt S(3/2)

Steigung von f im Punkt S:

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{-0,5x^2 + 2x + 0,5 - 2}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{-0,5 \cdot \left(x^2 - 4x + 3\right)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{-0,5 \cdot (x - 3) \cdot (x - 1)}{x - 3} =$$

$$\lim_{x \to 3} -0,5 \cdot (x - 1) = -0,5 \cdot 2 = -1$$

Steigung von g im Punkt S: $\quad g'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{0,5x^2 - 2,5 - 2}{x - 3} =$

$$\lim_{x \to 3} \frac{0,5 \cdot (x^2 - 9)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{0,5 \cdot (x - 3) \cdot (x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} 0,5 \cdot (x + 3) = 0,5 \cdot 6 = 3$$

Schnittwinkel der beiden Tangenten:

$$\tan \varphi_S = \left| \frac{f'(3) - g'(3)}{1 + f'(3) \cdot g'(3)} \right| = \left| \frac{-1 - 3}{1 + (-1) \cdot 3} \right| = \left| \frac{-4}{-2} \right| = 2 \quad \Rightarrow \quad \varphi_S = 63,4349...^\circ \approx 63,4^\circ$$

Oder mit Hilfe der Steigungswinkel der beiden Tangenten: $\quad \tan \alpha = -1 \;\Rightarrow\; \alpha = -45^\circ$ und

$\tan \beta = 3 \;\Rightarrow\; \beta = 71,565...^\circ \approx 71,6^\circ$ und $\varphi = 180^\circ - (|\alpha| + \beta) \approx 63,4^\circ$

Tangentengleichung an G_f in S: $\quad y = m \cdot x + t$ mit $m = f'(3) = -1$ also $y = -x + t$

Einsetzen des Punktes S(3/2) liefert t: $\; 2 = -1 \cdot 3 + t \;\Rightarrow\; t = 5$ also $y = -x + 5$

Tangentengleichung an G_g in S: $\quad y = m \cdot x + t$ mit $m = g'(3) = 3$ also $y = 3x + t$

Einsetzen des Punktes S(3/2) liefert t: $\; 2 = 3 \cdot 3 + t \;\Rightarrow\; t = -7$ also $y = 3x - 7$

Schnittpunkt T(-1/-2) : $\qquad$ Steigung von f im Punkt T:

$$f'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{-0,5x^2 + 2x + 0,5 + 2}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{-0,5 \cdot \left(x^2 - 4x - 5\right)}{x + 1} =$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{-0,5 \cdot \left(x + 1\right) \cdot (x - 5)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} -0,5 \cdot (x - 5) = -0,5 \cdot (-6) = 3$$

Steigung von g im Punkt T: $\quad g'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{0,5x^2 - 2,5 + 2}{x + 1} =$

$$\lim_{x \to -1} \frac{0,5 \cdot (x^2 - 1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{0,5 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} 0,5 \cdot (x - 1) = 0,5 \cdot (-2) = -1$$

Schnittwinkel in T ergibt sich wie im Fall des Schnittpunktes S zu $\varphi_T = 63,4349...^\circ \approx 63,4^\circ$,
denn die Steigungswinkel sind nur vertauscht (Punktsymmetrie bezüglich (1/0)).
Für die Tangentengleichungen erhält man $y = 3x + 1$ bzw. $y = -x - 3$.