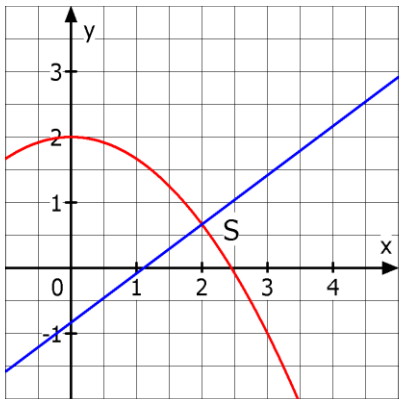
Q11 * Mathematik m4 * 1. Extemporale am 26.10.2011

Name: ……………………………………………

1. Das Bild zeigt die Graphen der beiden Funktionen f und g mit $f(x) = 2 - \frac{1}{3}x^2$ und $g(x) = \frac{3}{4}x - \frac{5}{6}$.

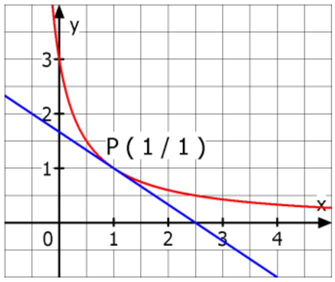
   Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der beiden Graphen im 1. Quadranten und prüfen Sie, ob sich die beiden Graphen senkrecht schneiden!



Fortsetzung auf der Rückseite!

2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{2x+1}$.

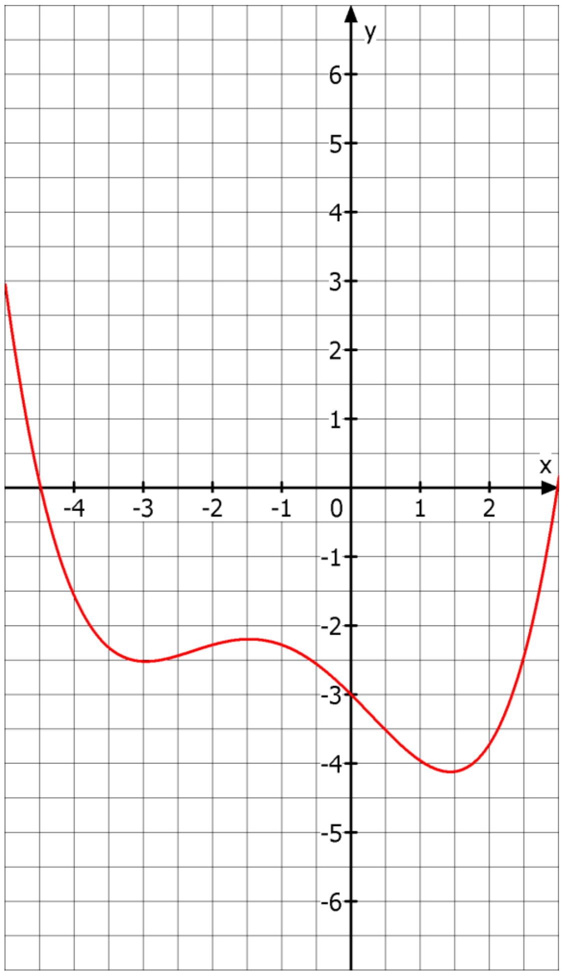
   Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(1/1)$.



3. Das Bild zeigt den Graphen einer Funktion f.

   Tragen Sie in das Bild den Graphen der Ableitung f' von f möglichst sauber ein.

   Verwenden Sie zunächst einen Bleistift!



Aufgabe	1	2	3	Summe
Punkte	9	6	5	20
erreichte Punkte				

Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * Mathematik m4 * 1. Extemporale am 26.10.2011 * Lösung

1. Schnittpunkt S :

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; 2 - \frac{1}{3}x^2 = \frac{3}{4}x - \frac{5}{6} \;\Leftrightarrow\; 0 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{17}{6} \;\Leftrightarrow\; 0 = 4x^2 + 9x - 34 \;\Leftrightarrow$$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\left(-9 \pm \sqrt{81 + 4\cdot 4\cdot 34}\right) = \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\left(-9 \pm 25\right) \;\Rightarrow$$

$$x_S = \frac{-9+25}{8} = 2 \text{ und } y_S = \frac{3}{4}\cdot 2 - \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \text{ und damit } S(2/\tfrac{2}{3})$$

Steigung der Geraden: $m_1 = \frac{3}{4}$

Steigung der Tangente an G_f :

$$m_2 = f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2-\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x^2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(2-x)\cdot(2+x)}{3\cdot(x-2)} =$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{-(2+x)}{3} = \frac{-(2+2)}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$m_1\cdot m_2 = \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = -1 \;\Rightarrow$$ die beiden Graphen schneiden sich senkrecht!

2. Steigung m der Tangente:

$$m = f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{3}{2x+1} - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{3-(2x+1)}{2x+1}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2-2x}{(2x+1)\cdot(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{-2\cdot(x-1)}{(2x+1)\cdot(x-1)} =$$

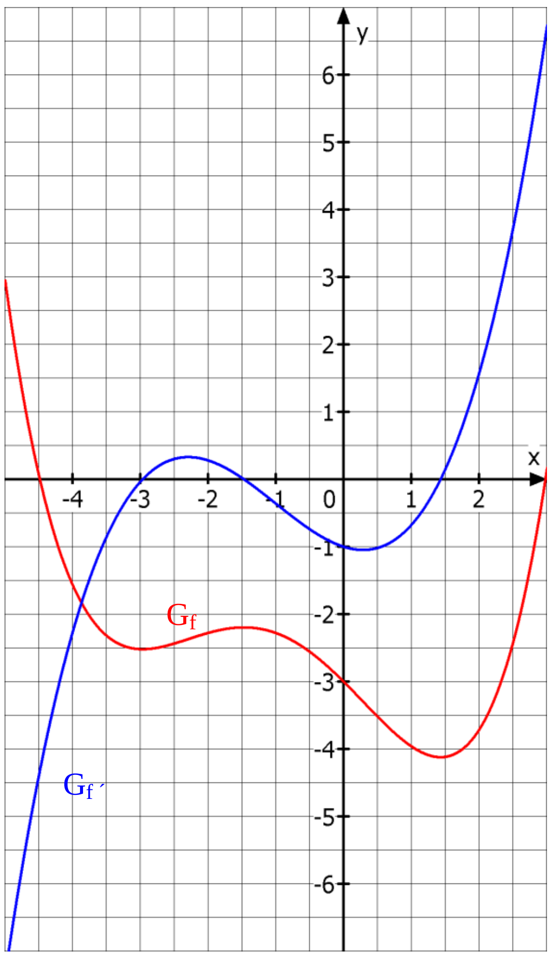
$$\lim_{x\to 1}\frac{-2}{(2x+1)} = \frac{-2}{2+1} = -\frac{2}{3}$$

Tangentengleichung: $y = -\frac{2}{3}x + t$

P(1/1) eingesetzt liefert für t :

$$1 = -\frac{2}{3}\cdot 1 + t \;\Rightarrow\; t = \frac{5}{3}$$

Tangentengleichung: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$



3. Waagrechte Tangenten bei G_f liefern die Nullstellen von f'.
Die „steilsten“ Stellen von G_f (Wendepunkte von G_f) liefern Hoch bzw. Tiefpunkte der Ableitung f'.

[Hinweis für Funktionsplotter:
$f(x) = 0{,}04\cdot(x^4 + 4x^3 - 4x^2) - x - 3$
$f'(x) = 0{,}04\cdot(4x^3 + 12x^2 - 8x) - 1$]