

## Q11 \* Mathematik \* Differenzenquotient und Differentialquotient

Die „Steigung des Graphen“ im Punkt  $P(2/1)$  der Funktion  $f(x) = \frac{1}{4}x^2$  soll ermittelt werden.

Dazu betrachten wir zunächst die Steigung einer Sekante  $PT_1$  mit einem weiteren Punkt  $T_1$  auf dem Graphen.

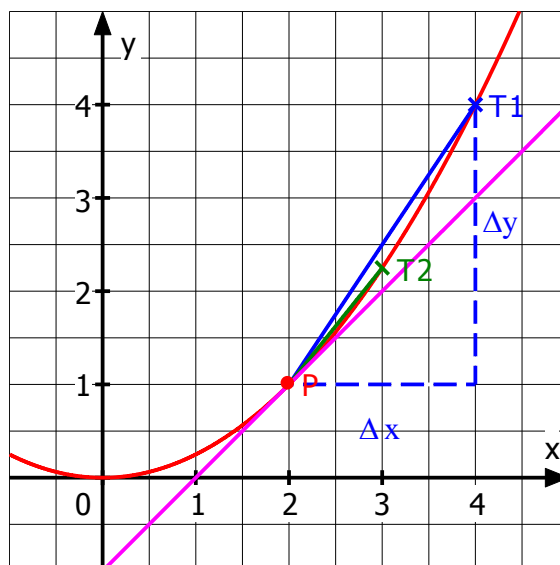
Für die Steigung  $m_1$  der Sekante  $PT_1$  gilt:

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{2} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{f(x_{T_1}) - f(x_P)}{x_{T_1} - x_P}$$

Bestimmen Sie die Steigung  $m_2$  der Sekante  $PT_2$ :

$$m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 1}{3 - 2} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{f(x_{T_2}) - f(x_P)}{x_{T_2} - x_P}$$

Den Quotienten  $\frac{f(x_T) - f(x_P)}{x_T - x_P}$  nennt man



**Differenzenquotient** (oder die **mittlere Änderungsrate**) von  $f$  im Intervall  $[x_P; x_T]$ .

Je dichter der Punkt  $T$  beim Punkt  $P$  liegt, umso besser wird der Wert der Sekantensteigung mit dem so genannten Wert der „Tangentensteigung“ des Graphen von  $f$  im Punkt  $P$  übereinstimmen.

Deshalb definieren wir:

Wenn für eine Funktion  $f$  an der Stelle  $x_P$  der Grenzwert  $\lim_{x_T \rightarrow x_P} \frac{f(x_T) - f(x_P)}{x_T - x_P} = m_P$  des

Differenzenquotienten existiert, dann nennen wir diesen Grenzwert  $m_P$  den **Differentialquotienten** (bzw. lokale Änderungsrate) von  $f$  an der Stelle  $x_P$ .

Die Gerade durch  $P$  mit der Steigung  $m_P$  nennen wir die **Tangente** an den Graphen von  $f$  im Punkt  $P$ .

Allgemein:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  ist der Differentialquotient von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

### Aufgaben:

1. Bestimmen Sie zur Funktion  $f(x) = \frac{1}{4}x^2$  an den Stellen  $x_0 = 2$ ,  $x_1 = 3$  und  $x_2 = -1$  jeweils den Wert der Tangentensteigung. Geben Sie auch die Gleichung der jeweiligen Tangente an.

2. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion  $f(x) = 0,5x^2 - 2x$  und ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen im Punkt  $P(3 / ?)$ .

3. Bestimmen Sie zur Funktion  $f(x) = \frac{1}{3}x^3$  im Punkt  $P(-1 / ?)$  die Tangentensteigung.

Geben Sie die Gleichung der zugehörigen Tangente an! Skizzieren Sie  $G_f$  und die Tangente.

## Q11 \* Mathematik \* Differenzenquotient und Differentialquotient \* Lösungen

$$m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1,25}{1} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{f(x_{T2}) - f(x_P)}{x_{T2} - x_P}$$

1.  $f(x) = 0,25x^2$ ;  $x_0 = 2 \Rightarrow$

$$m_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{0,25x^2 - 0,25 \cdot 2^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{0,25(x-2) \cdot (x+2)}{x-2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 0,25 \cdot (x+2) = 0,25 \cdot 4 = 1$$

$f(x) = 0,25x^2$ ;  $x_1 = 3 \Rightarrow$

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{0,25x^2 - 0,25 \cdot 3^2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{0,25(x-3) \cdot (x+3)}{x-3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} 0,25 \cdot (x+3) = 0,25 \cdot 6 = 1,5$$

$f(x) = 0,25x^2$ ;  $x_2 = -1 \Rightarrow$

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow x_2} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{0,25x^2 - 0,25 \cdot (-1)^2}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{0,25(x-1) \cdot (x+1)}{x+1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} 0,25 \cdot (x-1) = 0,25 \cdot (-2) = -0,5$$

2.  $f(3) = 0,5 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 = 4,5 - 6 = -1,5$  also  $P(3/-1,5)$

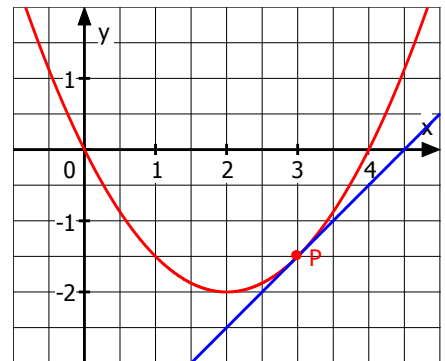
$$m = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{0,5x^2 - 2x - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{0,5x^2 - 2x + 1,5}{x - 3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{0,5(x-3) \cdot (x-1)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} 0,5 \cdot (x-1) = 0,5 \cdot 2 = 1$$

Tangentengleichung:  $y = m \cdot x + t = 1 \cdot x + t$

$P(3/-1,5)$  eingesetzt:  $-1,5 = 1 \cdot 3 + t \Rightarrow t = -4,5$

Also folgt die Tangentengleichung:  $y = x - 4,5$



3.  $f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 = -\frac{1}{3}$  also  $P(-1/-\frac{1}{3})$

$$m = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{1}{3}x^3 - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}}{x+1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{3 \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{3 \cdot (x+1)} =$$

$$\frac{1}{3} \cdot (1+1+1) = 1$$

Tangentengleichung:  $y = m \cdot x + t = 1 \cdot x + t$

$P(-1/-\frac{1}{3})$  eingesetzt:  $-\frac{1}{3} = 1 \cdot (-1) + t \Rightarrow t = \frac{2}{3}$

Also folgt die Tangentengleichung:  $y = x + \frac{2}{3}$

