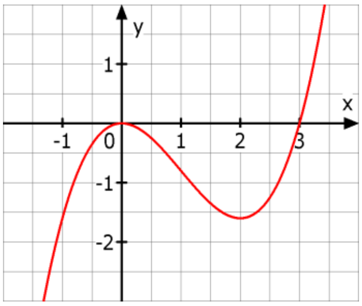
Q11 * Mathematik * Die Ableitung von Polynomfunktionen

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}4x^3 - 1{,}2x^2$.

   a) Bestimmen Sie alle Punkte des Graphen von f mit horizontaler Tangente. Handelt es sich um Hoch- Tief- oder Terrassenpunkte?

   b) Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels, unter dem der Graph von f die x-Achse schneidet.

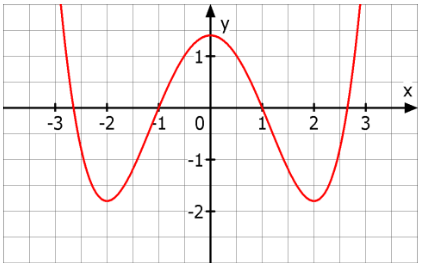


2. Gegeben ist die Funktionen f mit $f(x) = 0{,}2x^4 - 1{,}6x^2 + 1{,}4$.

   a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

   b) Bestimmen Sie die Winkel, unter denen der Graph von f die x-Achse schneidet.

   c) Begründen Sie, dass der Graph von f bei $x_1 = 2$ einen Tiefpunkt besitzt.

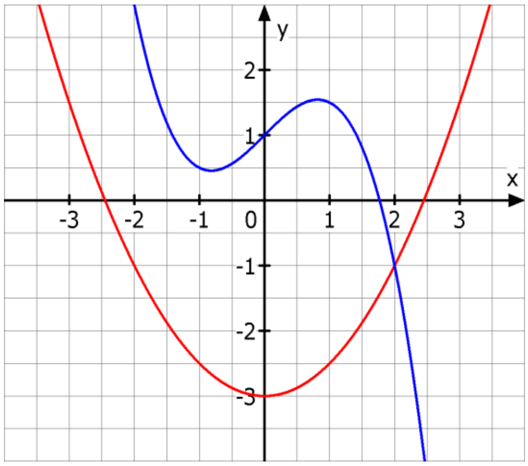


3. Gegeben sind die beiden Funktionen f und g mit $f(x) = -0{,}5x^3 + x + 1$ und $g(x) = 0{,}5x^2 - 3$.

   a) Zeigen Sie, dass sich die Graphen der beiden Funktionen nur in einem Punkt schneiden.

   b) Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Graphen.

   c) Begründen Sie, dass der Graph von f genau einen Hochpunkt besitzt, und bestimmen Sie dessen Koordinaten.



Q11 * Mathematik * Die Ableitung von Polynomfunktionen * Lösungen

1. a) $f(x) = 0,4x^3 - 1,2x^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 0,4\cdot 3\cdot x^2 - 1,2\cdot 2\cdot x = 1,2\cdot x\cdot(x-2)$

hor. Tg.: $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1,2\cdot x\cdot(x-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0$ und $x_2 = 2$

x	$x < 0$	$x_1 = 0$	$0 < x < 2$	$x_2 = 2$	$2 < x$
$f'(x) = 1,2\cdot x\cdot(x-2)$	> 0	0	< 0	0	> 0

Bei $x_1 = 0$ ändert sich das Vorzeichen von + auf – , also liegt bei x_1 ein HOP.
Bei $x_2 = 2$ ändert sich das Vorzeichen von – auf + , also liegt bei x_2 ein TIP.

Also HOP (0 / 0) und TIP (2 / - 1,6)

b) Schnittpunkte mit der x-Achse:

$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 0,4\cdot x^2\cdot(x-3) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0$ (doppelte Nullstelle) und $x_3 = 3$

Nur bei x_3 schneidet G_f die x-Achse.

$f'(x) = 1,2\cdot x\cdot(x-2) \;\Rightarrow\; f'(3) = 1,2\cdot 3\cdot(3-2) = 3,6$; also $\tan\varphi = 3,6$

$\varphi = \tan^{-1}(3,6) = 74,4758...^\circ \approx 74,5^\circ$

2. a) NSt. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 0,2x^4 - 1,6x^2 + 1,4 = 0 \Leftrightarrow 0,2\cdot(x^4 - 8x^2 + 7) = 0$ Substitution $x^2 = u \Leftrightarrow$

$0,2\cdot(u^2 - 8u + 7) = 0 \;\Leftrightarrow\; 0,2\cdot(u-1)\cdot(u-7) = 0$ also $x^2 = 1$ oder $x^2 = 7$

$x_{1/2} = \pm 1$ und $x_{3/4} = \pm\sqrt{7}$

b) Wegen der Achsensymmetrie von G_f entsprechen die Schnittwinkel bei x_2 und x_4 denen bei x_1 und x_3 (bis auf das Vorzeichen).

$f'(x) = 0,2\cdot 4\cdot x^3 - 1,6\cdot 2\cdot x + 0 = 0,8\cdot x\cdot(x^2 - 4)$

$f'(1) = 0,8 - 3,2 = -2,4$ und $f'(\sqrt{7}) = 0,8\cdot\sqrt{7}\cdot(7-4) = 2,4\cdot\sqrt{7}$

$\tan\varphi_1 = -2,4 \;\Rightarrow\; \varphi_1 = \tan^{-1}(-2,4) = -67,380...^\circ \approx -67,4^\circ$ also Schnittwinkel $67,4^\circ$

$\tan\varphi_2 = 2,4\cdot\sqrt{7} \;\Rightarrow\; \varphi_2 = \tan^{-1}(2,4\cdot\sqrt{7}) = 81,050...^\circ \approx 81,1^\circ$

c) $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 0,8\cdot x\cdot(x^2 - 4) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_5 = 0$ oder $x_{6/7} = \pm 2$

x	$x < -2$	$x_1 = -2$	$-2 < x < 0$	$x_2 = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
$f'(x) = 0,8\cdot x\cdot(x^2 - 4)$	< 0	0	> 0	0	< 0	0	> 0

An der Stelle $x_6 = 2$ ändert sich das Vorzeichen von $f'(x)$ von - auf + , d.h. an der Stelle $x_6 = 2$ liegt ein Tiefpunkt von G_f.

3. a) $f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; -0,5x^3 + x + 1 = 0,5x^2 - 3 \;\Leftrightarrow -0,5x^3 - 0,5x^2 + x + 4 = 0 \;\Leftrightarrow$

$x^3 + x^2 - 2x - 8 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-2)\cdot(x^2 + 3x + 4) = 0$ (mit Polynomdivision)

$x_1 = 2$ und $(x^2 + 3x + 4) = 0$ hat wegen $D = 3^2 - 4\cdot 1\cdot 4 < 0$ keine weitere Lösung.

b) $f'(x) = -1,5\cdot x^2 + 1$ und $g'(x) = x$ also $m_1 = f'(2) = -5$ und $m_2 = g'(2) = 2$

$$\tan\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1\cdot m_2}\right| = \left|\frac{-7}{1-10}\right| = \quad \text{also } \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{7}{9}\right) = 37,87...^\circ \approx 37,9^\circ$$

c) $f'(x) = -1,5\cdot x^2 + 1$ und $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1,5x^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 = \frac{2}{3} \;\Leftrightarrow\; x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

An der Stelle $x_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ändert $f'(x) = -1,5\cdot x^2 + 1$ das Vorzeichen von + auf – , d.h der

Graph von f hat bei x_2 einen HOP. Koordinaten: HOP $\left(\frac{\sqrt{6}}{3} \,/\, \frac{9 + 2\sqrt{6}}{9}\right) \approx (0,82 \,/\, 1,54)$