Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Ein LGS löst man nach dem sogenannten Gauß – Algorithmus:
Beispiel:

$$\begin{array}{ll} (1) & 3x+4y+5z=6 \\ (2) & x-y-4z=1 \quad \Rightarrow \quad x=1+y+4z \;\text{ in (1) und (3)} \\ (3) & 2x+y-3z=1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (1') & 3\cdot(1+y+4z)+4y+5z=6 \;\Leftrightarrow\; 7y+17z=3 \\ (3') & 2\cdot(1+y+4z)+y-3z=1 \;\Leftrightarrow\; 3y+5z=-1 \;\Rightarrow\; z=-0,2-0,6y \;\text{ in } (1') \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (1'') & 7y+17\cdot(-0,2-0,6y)=3 \;\Leftrightarrow\; 7y-3,4-10,2y=3 \;\Leftrightarrow\; -3,2y=6,4 \;\Leftrightarrow \\ & y=-2 \;\text{ und }\; z=-0,2-0,6y=-0,2+1,2=1 \;\text{ und }\; x=1+y+4z=1-2+4=3 \\ & \text{Lösung: } (x/y/z)=(3/-2/1) \quad \text{oder} \quad L=\{(3/-2/1)\} \end{array}$$

1. Bestimme jeweils die Lösung des linearen Gleichungssystems.

a) $\begin{array}{ll} (1) & 5x+3y-2z=7 \\ (2) & 2x+4y+z=-1 \\ (3) & x-2y+3z=10 \end{array}$ b) $\begin{array}{ll} (1) & 3x-2y+z=4 \\ (2) & 4x+3y-5z=-3 \\ (3) & x+y-2z=-3 \end{array}$

c) $\begin{array}{ll} (1) & x+y+z=2 \\ (2) & 2x+3y+2z=3 \\ (3) & 3x+y+5z=4 \end{array}$ d) $\begin{array}{ll} (1) & 3x+4y-3z=0 \\ (2) & 2x+3y-z=3 \\ (3) & x-y+2z=4 \end{array}$

e) $\begin{array}{ll} (1) & \frac{1}{4}x+y-\frac{1}{2}z=2 \\ (2) & \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{2}{3}z=-1 \\ (3) & x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{3}z=0 \end{array}$ f) $\begin{array}{ll} (1) & 0,5x+0,3y-z=0,45 \\ (2) & 1,2x+y+0,8z=4,7 \\ (3) & x-2y+1,5z=0,5 \end{array}$

2. Die folgenden linearen Gleichungssysteme haben keine oder unendlich viele Lösungen.

a) $\begin{array}{ll} (1) & x+2y+3z=4 \\ (2) & 4x+3y+7z=11 \\ (3) & 2x-y+z=3 \end{array}$ b) $\begin{array}{ll} (1) & 3x+y-2z=1 \\ (2) & 9x-4y-z=2 \\ (3) & x-2y+z=3 \end{array}$

c) $\begin{array}{ll} (1) & x-3y+2z=4 \\ (2) & 2x+y-z=3 \\ (3) & 4x-5y+3z=8 \end{array}$ d) $\begin{array}{ll} (1) & 3x+y-5z=7 \\ (2) & x+y-3z=5 \\ (3) & x-y+z=-3 \end{array}$

Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Lineare Gleichungssysteme (LGS) * Lösungen

Lösungen:

1.a) $(x/y/z) = (3/-2/1)$ b) $(x/y/z) = (2/3/4)$

c) $(x/y/z) = (5/-1/-2)$ d) $(x/y/z) = (0{,}5/1{,}5/2{,}5)$

e) $(x/y/z) = (-2/4/3)$ f) $(x/y/z) = (2/1{,}5/1)$

2.a) $L = \{(x/2-x/1+x) \;/\; x \in R\}$

b) $L = \{\ \}$

c) $L = \{\ \}$

d) $L = \{(x/2x+2/x-1) \;/\; x \in R\}$ oder

$L = \{(z+1/2z+4/z) \;/\; z \in R\}$

Ausführliche Lösung zu 2a

2.a) (1) $x + 2y + 3z = 4$

(2) $4x + 3y + 7z = 11$

(3) $2x - y + z = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 2x + z - 3$ in (1) und (2)

(1´) $x + 2\cdot(2x+z-3) + 3z = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 5x + 5z = 10 \quad \Leftrightarrow \quad x + z = 2$

(2´) $4x + 3\cdot(2x+z-3) + 7z = 11 \quad \Leftrightarrow \quad 10x + 10z = 20 \quad \Leftrightarrow \quad x + z = 2$

(1´) und (2´) sind äquivalent, d.h. man kann z.B. $x \in R$ frei wählen $\Leftrightarrow$

$z = 2 - x$ und $y = 2x + z - 3 = 2x + 2 - x - 3 = x - 1$

Es gibt damit unendliche viele Lösungen:

$L = \{(x/\ x-1/2-x) \;/\;$ mit $x \in R\}$

So sind z.B. $(0/-1/2)$ oder $(1/0/1)$ oder $(2/1/0)$ oder $(-1/-2/3)$ ....

Lösungen des LGS.

Lösungen:

1.a) $(x/y/z) = (3/-2/1)$ b) $(x/y/z) = (2/3/4)$

c) $(x/y/z) = (5/-1/-2)$ d) $(x/y/z) = (0{,}5/1{,}5/2{,}5)$

e) $(x/y/z) = (-2/4/3)$ f) $(x/y/z) = (2/1{,}5/1)$

2.a) $L = \{(x/\ x-1/2-x) \;/\;$ mit $x \in R\}$

b) $L = \{\ \}$

c) $L = \{\ \}$

d) $L = \{(z-4/2z-11/z) \;/\; z \in R\}$