Mathematik * Jahrgangsstufe 9
Das Heron-Verfahren zur Ermittlung der Quadratwurzel von a

Wie berechnet man möglichst schnell die Wurzel einer Zahl a > 0 ?

Nehmen wir den Fall $a = 10$.
Wie bestimmt der Taschenrechner den Wert $\sqrt{10} \approx 3{,}16227766...$?

Auch ohne Taschenrechner sieht man sofort

$3 < \sqrt{10} < 4$, denn $3^2 = 9 < 10 < 16 = 4^2$

Durch geeignetes Suchen und Rechnen findet man die nächste Dezimalstelle von $\sqrt{10}$
$3{,}1 < \sqrt{10} < 3{,}2$, denn $3{,}1^2 = 9{,}61 < 10 < 10{,}24 = 3{,}2^2$

Um die nächste Dezimalstelle von $\sqrt{10}$ zu finden, muss man sich schon mehr anstrengen.

$3{,}16 < \sqrt{10} < 3{,}17$, denn $3{,}16^2 = 9{,}9856 < 10 < 10{,}0489 = 3{,}17^2$

Einen wesentlich schnelleren und effektiveren Weg zum Ermitteln der Dezimalbruch-entwicklung von $\sqrt{10} = 3{,}16227766...$ liefert das so genannte Verfahren von Heron.

Die Idee für diese Berechnung von Quadratwurzeln ist schon sehr alt und wird nach dem griechischen Mathematiker und Ingenieur **Heron von Alexandria** (1. Jh. N. Chr.) benannt. Das **Heron-Verfahren** war aber schon 2000 Jahre früher den Babyloniern bekannt.

Wir beginnen mit einer natürlichen Zahl x_1 , die in der Nähe der Quadratwurzel $\sqrt{a}$ liegt und berechnen anschließend der Reihe nach immer nach dem gleichen Schema Brüche, die sich der gesuchten Wurzel immer genauer annähern.

Wähle eine natürliche Zahl $x_1 \approx \sqrt{a}$ und berechne dann $x_2 = \left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) : 2$ und dann $x_3 = \left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right) : 2$ und dann $x_4 = \left(x_3 + \frac{a}{x_3}\right) : 2$ usw.

Wenn wir z.B. $\sqrt{10}$ berechnen wollen, so beginnen wir z.B. mit $x_1 = 3$

$$x_2 = \left(x_1 + \frac{10}{x_1}\right) : 2 = \left(3 + \frac{10}{3}\right) : 2 = \frac{9+10}{3 \cdot 2} = \frac{19}{6} \approx 3{,}16666666...$$

$$x_3 = \left(x_2 + \frac{10}{x_2}\right) : 2 = \left(\frac{19}{6} + \frac{10}{\frac{19}{6}}\right) : 2 = \frac{19 \cdot 19 + 10 \cdot 6 \cdot 6}{6 \cdot 19 \cdot 2} = \frac{721}{228} \approx 3{,}162280702....$$

$$x_4 = \left(x_3 + \frac{10}{x_3}\right) : 2 = \left(\frac{721}{228} + \frac{10}{\frac{721}{228}}\right) : 2 = \frac{721 \cdot 721 + 10 \cdot 228 \cdot 228}{228 \cdot 721 \cdot 2} = \frac{1039681}{328776} \approx 3{,}16227766....$$

Der Vergleich mit dem Taschenrechnerwert $\sqrt{10} = 3{,}16227766....$ zeigt, dass das Heron-Verfahren sehr schnell gute Näherungswerte für die Quadratwurzel liefert.

Graphische Veranschaulichung des Heron-Verfahrens am Beispiel $\sqrt{6}$

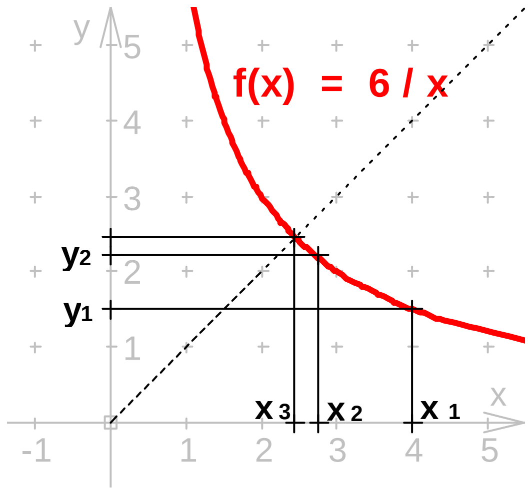
Im Bild wird veranschaulicht, wie man mit dem Heron-Verfahren die Wurzel von $a = 6$ berechnet.

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{a}{x}$

[bei uns also $f(x) = \frac{6}{x}$]

wird von der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten genau im Punkt $\left(\sqrt{6}\,;\sqrt{6}\right)$ geschnitten, denn

$$f(\sqrt{6}) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$



Die Parallelen zu den beiden Achsen vom Punkt $\left(\sqrt{6}\,;\sqrt{6}\right)$ aus bilden zusammen mit den Achsen ein Quadrat mit dem Flächeninhalt $\sqrt{6}\cdot\sqrt{6} = 6$.

Wir nähern uns dem noch unbekannten Wert von $\sqrt{6}$, indem wir mit einem beliebigen Wert x_1 beginnen, z.B. $x_1 = 4$.

Wir berechnen $y_1 = f(x_1) = \frac{6}{x_1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; nun gilt $x_1 \cdot y_1 = 6$ und ersichtlich ist x_1 größer als $\sqrt{6}$ und y_1 kleiner als $\sqrt{6}$.

Im Diagramm sehen wir ein Rechteck mit den Seiten x_1 und y_1 und dem Flächeninhalt 6.

Der gesuchte Wert für $\sqrt{6}$ liegt also zwischen y_1 und x_1.

Deshalb bilden wir den Mittelwert von x_1 und y_1 und nennen ihn x_2. Der Wert von x_2 liegt sicher dichter am Wert von $\sqrt{6}$ als der Wert von x_1 und es gilt:

$$x_2 = (x_1 + y_1) : 2 = \left(x_1 + \frac{6}{x_1}\right) : 2 = \ldots = \frac{11}{4} = 2{,}75. \quad \left(y_2 = \frac{6}{x_2} = \frac{6\cdot 4}{11} = \frac{24}{11} = 2{,}1818\ldots \right)$$

Also gilt nun $y_2 = 2{,}1818\ldots < \sqrt{6} < 2{,}75 = x_2$. Wir sind aber noch nicht zufrieden!

Wieder bilden wir den Mittelwert von x_2 und y_2 und erhalten einen besseren Wert x_3.

$$x_3 = \left(x_2 + \frac{6}{x_2}\right) : 2 = \ldots = \frac{217}{88} = 2{,}4659\ldots$$

Wenn wir die Rechenschritte wiederholen, dann kommen wir dem Wert von $\sqrt{6}$ immer näher.

$$x_4 = \left(x_3 + \frac{6}{x_3}\right) : 2 = \ldots = \frac{93553}{38192} = 2{,}4495\ldots \quad \text{und}$$

$$x_5 = \left(x_4 + \frac{6}{x_4}\right) : 2 = \ldots = \frac{17503936993}{7145952352} \approx 2{,}449489743 \quad (\text{vgl. } \sqrt{6} \approx 2{,}449489743)$$

Schon nach 5 Schritten haben wir mit diesem **Iterationsverfahren** $\sqrt{6}$ sehr genau bestimmt.

Aufgabe:

Bereche nach dem Heron-Verfahren $\sqrt{5}$, $\sqrt{4}$ und $\sqrt{3}$ und vergleiche mit dem TR-Wert!