Mathematik * Jahrgangsstufe 8 * Aufgaben zu Ungleichungen

1. Bei einem Quadrat der Kantenlänge x werden zwei gegenüberliegende Seiten um jeweils 8cm vergrößert, so dass ein Rechteck entsteht.
   Der Flächeninhalt soll sich dabei aber höchstens um $400\ cm^2$ vergrößern.
   Welche Werte kann x annehmen?

2. Ein rechteckiges Grundstück hat die Seitenlängen 30m und 36m
   Um wie viele Meter darf man die
   a) kleineren Seiten,
   b) die größeren Seiten
   des Grundstücks höchstens zu einem neuen Rechteck verlängern,
   so dass sich der Flächeninhalt des Grundstücks um höchstens $180m^2$ vergrößert?

3. Der Umfang eines Rechtecks soll höchstens 140m betragen.
   Eine Seite des Rechtecks ist dabei um 12m länger als die andere.
   Bestimme den maximalen Flächeninhalt dieses Rechtecks.

4. In einem Getränketräger der Masse 1,5 kg haben 12 Flaschen Sprudel der Masse 550g Platz.
   Eine Flasche Sprudel enthält 500g Wasser, die Flasche wiegt also 50g.
   Mit einer Hebebühne dürfen maximal 200 kg gehoben werden.

   a) Wie viele volle Träger darf man mit der Hebebühne maximal hochheben?

   b) Wie viele Träger mit leeren Flaschen dürfte man zu den in a) berechneten vollen Trägern aufladen?

5. Peter füllt eine Trommel mit Kugeln, auf denen jeweils die Zahl 3 oder 4 steht.
   Die Anzahl der Kugeln mit der Aufschrift 3 muss um mindestens 20 größer als die Anzahl der Kugeln mit der Zahl 4 sein. Es müssen sich aber mindestens 10 Kugel mit der Aufschrift 4 in der Trommel befinden.
   a) Die Summe der Zahlen aller Kugeln in der Trommel soll höchstens 1000 betragen.
   Bestimme die maximale Anzahl an Kugeln in der Trommel.
   b) Die Summe der Zahlen aller Kugeln in der Trommel soll mindestens 1000 betragen.
   Bestimme die minimale Anzahl an Kugeln in der Urne.

6. Löse die folgenden Doppelungleichungen und veranschauliche die Lösungsmenge mit einer geeigneten Zeichnung im x-y-Koordinatensystem.

   a) $-0{,}5 < 0{,}5x - 1 \leq 1{,}5$
   (Hinweis: Was bedeutet die Ungleichung für die Gerade mit $y = 0{,}5x - 1$?)

   b) $4 \geq 1 - 2x \geq -1$

Mathematik * Jahrgangsstufe 8 * Aufgaben zu Ungleichungen * Lösungen

1. $x \cdot (x + 8\text{cm}) \le x \cdot x + 400\text{cm}^2 \iff x^2 + x \cdot 8\text{cm} \le x^2 + 400\text{cm}^2 \iff x \cdot 8\text{cm} \le 400\text{cm}^2$
   $x \le 400\text{cm}^2 : 8\text{cm} \iff x \le 50\,\text{cm}$
   Die Kantenlänge kann höchstens 50cm lang sein.

2. a) $(30\text{m} + x) \cdot 36\text{m} \le 30\text{m} \cdot 36\text{m} + 180\,\text{m}^2 \iff 30\text{m} \cdot 36\text{m} + x \cdot 36\text{m} \le 30\text{m} \cdot 36\text{m} + 180\,\text{m}^2 \iff$
   $x \cdot 36\text{m} \le 180\,\text{m}^2 \iff x \le 180\,\text{m}^2 : 36\,\text{m} = 5\,\text{m}$
   Die kleinere Seite darf also höchstens um 5m verlängert werden.

   b) $(36\text{m} + x) \cdot 30\text{m} \le 36\text{m} \cdot 30\text{m} + 180\,\text{m}^2 \iff 36\text{m} \cdot 30\text{m} + x \cdot 30\text{m} \le 36\text{m} \cdot 30\text{m} + 180\,\text{m}^2 \iff$
   $x \cdot 30\text{m} \le 180\,\text{m}^2 \iff x \le 180\,\text{m}^2 : 30\,\text{m} = 6\,\text{m}$
   Die größere Seite darf also höchstens um 6m verlängert werden.

3. Seitenlängen des Rechtecks: a und b = a + 12m.
   $U = 2a + 2(a + 12\text{m})$ und $U \le 140\text{m} \Rightarrow$
   $2a + 2(a + 12\text{m}) \le 140\text{m} \iff 4a + 24\text{m} \le 140\text{m} \iff 4a \le 116\,\text{m} \iff a \le 29\,\text{m}$
   maximaler Flächeninhalt $A_{max} = a_{max} \cdot (a_{max} + 12\text{m}) = 29\text{m} \cdot 41\text{m} = 1189\,\text{m}^2$

4. a) Masse eines vollen Trägers: $1{,}5\text{kg} + 12 \cdot 0{,}550\text{kg} = 8{,}1\text{kg}$
   Mit der Anzahl n an vollen Trägern gilt also $n \cdot 8{,}1\text{kg} \le 200\,\text{kg} \Rightarrow n \le \dfrac{200\,\text{kg}}{8{,}1\text{kg}} = 24{,}69...$
   Man darf also höchstens 24 volle Träger mit der Hebebühne hochheben.

   b) $24 \cdot 8{,}1\text{kg} = 194{,}4\,\text{kg}$ und $200\,\text{kg} - 194{,}4\,\text{kg} = 5{,}6\,\text{kg}$
   Ein Träger mit leeren Flaschen hat die Masse
   $1{,}5\text{kg} + 12 \cdot 0{,}050\,\text{kg} = 2{,}1\text{kg}$; $2 \cdot 2{,}1\text{kg} = 4{,}2\,\text{kg}$ und $3 \cdot 2{,}1\text{kg} = 6{,}3\text{kg} \Rightarrow$
   Man kann noch 2 Träger mit leeren Flaschen zu den 24 vollen Trägern hinzufügen.

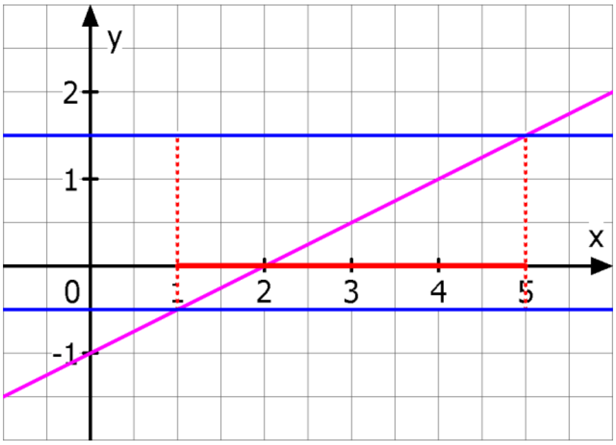
5. Die Anzahl der Kugeln mit Aufschrift 3 soll n sein.
   Die Anzahl der Kugeln mit Aufschrift 3 soll m sein.
   Dann muss gelten: $m \ge 10$ und $n > m + 20$

   a) $n \cdot 3 + m \cdot 4 \le 1000$ und $n + m$ soll möglichst groß sein. $\Rightarrow$
   $m = 10$ und damit $n \cdot 3 + 40 \le 1000 \Rightarrow 3n \le 960 \Rightarrow n \le 320$
   Die maximale Anzahl an Kugeln beträgt damit 320 + 10 = 330.

   b) $n \cdot 3 + m \cdot 4 \ge 1000$ und $n + m$ soll möglichst klein sein. $\Rightarrow$
   Die Anzahl der Kugeln mit Aufschrift 4 sollte möglichst groß sein.
   Daher wählt man für n den Wert m + 21.
   $(m + 21) \cdot 3 + m \cdot 4 \ge 1000 \iff 3m + 63 + 4m \ge 1000 \iff 7m \ge 937 \iff m \ge 133{,}8...$
   Für m wählt man nun den kleinstmöglichen Wert, d.h. m = 134.
   Die minimale Anzahl an Kugeln lautet damit 134 + (134 + 21) = 289.
   [Probe: $134 \cdot 4 + (134 + 21) \cdot 3 = 134 \cdot 4 + 155 \cdot 3 = 536 + 465 = 1001$]

6. a) $-0{,}5 < 0{,}5x - 1 \leq 1{,}5 \iff 0{,}5 < 0{,}5x \leq 2{,}5 \iff 1 < x \leq 5$ also $L =]1\,;5]$

Im Bereich $1 < x \leq 5$ liegt die Gerade mit der Gleichung $y = 0{,}5x - 1$ zwischen den Parallelen zur x-Achse mit den Gleichungen $y = -0{,}5$ und $y = 1{,}5$.



b) $4 \geq 1 - 2x \geq -1 \iff 3 \geq -2x \geq -2 \iff -1{,}5 \leq x \leq 1$ also $L = [-1{,}5\,;1]$

Im Bereich $-1{,}5 \leq x \leq 1$ liegt die Gerade mit der Gleichung $y = -2x + 1$ zwischen den Parallelen zur x-Achse mit den Gleichungen $y = 4$ und $y = -1$.