Q11 * Mathematik * Aufgaben zur natürlichen Logarithmusfunktion

1. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils den Definitionsbereich D_f , den Term $f'(x)$ der Ableitungsfunktion und alle Hoch- bzw. Tiefpunkte des Graphen von f.

   a) $f(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$

   b) $f(x) = \ln\left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right)$

   c) $f(x) = \ln\frac{3x}{x^2+4}$

   d) $f(x) = \ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

2. Wie allgemein bekannt gelten für Logarithmen die folgenden Gesetzmäßigkeiten:

   $\log_b x + \log_b y = \log_b(x \cdot y)$; $\log_b x - \log_b y = \log_b(\frac{x}{y})$; $\log_b(x^n) = n \cdot \log_b x$

   Peter behauptet daher, dass die Funktionen f und g völlig identisch sind.
   Nehmen Sie zu Peters Behauptung Stellung.

   a) $f(x) = \ln(x^2)$ und $g(x) = 2 \cdot \ln(x)$

   b) $f(x) = \ln(x) + \ln(x+1)$ und $g(x) = \ln(x \cdot (x+1))$

Und nun noch eine anspruchsvolle Aufgabe für Mathe-Experten:

3. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 10 \cdot \ln\left(\frac{2x}{\sqrt{3x^2+4}}\right)$.

   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und alle Nullstellen von f.

   b) Zeigen Sie, dass f eine streng monoton wachsende Funktion und damit umkehrbar ist.

   c) Bestimmen Sie den Term $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion von f .

Q11 * Mathematik * Aufgaben zur natürlichen Logarithmusfunktion

Lösungen

1. a) $f(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$; $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ und TIP(0 / 0)

   b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{2}\right) = \ln\dfrac{4+x^2}{2x}$; $D_f = \mathbb{R}^+$; $f'(x) = \dfrac{x^2-4}{x\cdot(4+x^2)}$; TIP $(2 / \ln 2)$

   c) $f(x) = \ln\dfrac{3x}{x^2+4}$; $D_f = \mathbb{R}^+$; $f'(x) = \dfrac{4-x^2}{x\cdot(4+x^2)}$; HOP$(2 / \ln\dfrac{3}{4})$

   d) $f(x) = \ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$; $D_f =]-1\,;\infty[$; $f'(x) = \dfrac{1-x}{(1+x)\cdot(x^2+1)}$; HOP$(1 / \ln\sqrt{2})$

2. a) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $D_g = \mathbb{R}^+$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D_g$

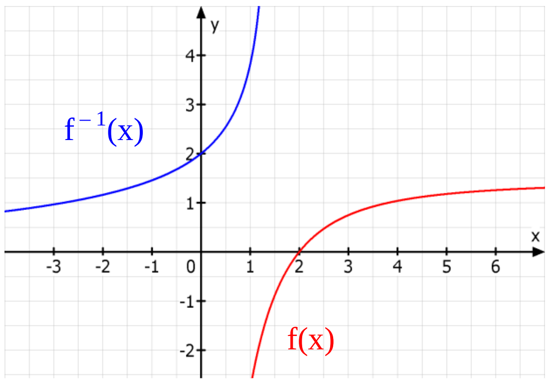
   (G_f ist symmetrisch zur y-Achse.)

   b) $D_f = \mathbb{R}^+$ und $D_g =]-\infty\,;-1[\ \cup\ ]0\,;\infty[$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D_f$

3. a) $D_f = \mathbb{R}^+$ und NSt.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$

   b) $f'(x) = \dfrac{40}{x\cdot(3x^2+4)} > 0$ für alle $x \in D_f = \mathbb{R}^+$

   c) $f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{4e^{0,2x}}{4-3e^{0,2x}}}$



Ausführliche Lösung zur Aufgabe 3

3. $f(x) = 10 \cdot \ln \frac{2x}{\sqrt{3x^2+4}}$

a) $D_f = \mathbb{R}^+$, denn $\frac{2x}{\sqrt{3x^2+4}} > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^+$

NSt.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{3x^2+4}} = 1 \Rightarrow \frac{4x^2}{3x^2+4} = 1 \Leftrightarrow$

$4x^2 = 3x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$

Aber nur $x_1 = +2$ ist NSt., denn $x_2 = -2 \notin D_f$

b) $f'(x) = 10 \cdot \frac{\sqrt{3x^2+4}}{2x} \cdot \frac{2\sqrt{3x^2+4} - 2x \cdot \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+4}}}{(3x^2+4)}$

$= 10 \cdot \frac{\sqrt{3x^2+4}}{2x} \cdot \frac{2 \cdot (3x^2+4) - x \cdot 6x}{(3x^2+4) \cdot \sqrt{3x^2+4}} =$

$= \frac{5 \cdot \sqrt{3x^2+4}}{x} \cdot \frac{8}{(3x^2+4) \cdot \sqrt{3x^2+4}} = \frac{40}{x \cdot (3x^2+4)} > 0$

für alle $x \in D_f$

Also ist f str. monoton steigend und damit umkehrbar.

c) $f: \quad y = 10 \cdot \ln \frac{2x}{\sqrt{3x^2+4}}$ mit $D_f = \mathbb{R}^+$

$f^{-1}: \quad x = 10 \cdot \ln \frac{2y}{\sqrt{3y^2+4}}$ (mit $y \in W_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}^+$)

$\Leftrightarrow \frac{x}{10} = \ln \frac{2y}{\sqrt{3y^2+4}} \Leftrightarrow e^{0{,}1x} = \frac{2y}{\sqrt{3y^2+4}} \Rightarrow$

$e^{0{,}2x} = \frac{4y^2}{3y^2+4} \Leftrightarrow (3y^2+4)\, e^{0{,}2x} = 4y^2 \Leftrightarrow$

$3y^2 \cdot e^{0{,}2x} + 4e^{0{,}2x} = 4y^2 \Leftrightarrow 4e^{0{,}2x} = 4y^2 - 3y^2 \cdot e^{0{,}2x}$

$\Leftrightarrow \quad 4e^{0{,}2x} = y^2 \cdot (4 - 3e^{0{,}2x}) \Leftrightarrow$

$y^2 = \frac{4e^{0{,}2x}}{4-3e^{0{,}2x}} \Rightarrow y_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{4e^{0{,}2x}}{4-3e^{0{,}2x}}}$

$f^{-1}(x) = +\sqrt{\frac{4e^{0{,}2x}}{4-3e^{0{,}2x}}} = \frac{2e^{0{,}1x}}{\sqrt{4-3e^{0{,}2x}}}$

wegen $W_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}^+$

Die Bestimmung von $D_{f^{-1}} = W_f$ ist nicht verlangt, gehört aber eigentlich auch zur Ermittlung von f^{-1}

$f^{-1}(x) = \frac{2e^{0,1x}}{\sqrt{4-3e^{0,2x}}}$ und es muss gelten:

$$4-3e^{0,2x} > 0 \Leftrightarrow 3e^{0,2x} < 4 \Leftrightarrow e^{0,2x} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$0,2x < \ln\frac{4}{3} \Leftrightarrow x < 5\cdot\ln\frac{4}{3} \approx 1,44$$

also $D_{f^{-1}} =]-\infty\,;\, 5\cdot\ln\frac{4}{3}[$

oder Bestimmung von W_f

$f(x) = 10\cdot\ln\frac{2x}{\sqrt{3x^2+4}}$ und f str. mon. wachsend und $D_f = \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} 10\cdot\ln\frac{2x}{\sqrt{3x^2+4}} = \text{„}\,10\cdot\ln\frac{0^+}{2}\,\text{"} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 10\cdot\ln\frac{2x}{\sqrt{3x^2}} = \lim_{x\to\infty} 10\cdot\ln\frac{2x}{\sqrt{3}\cdot x} =$$

$$= 10\cdot\ln\frac{2}{\sqrt{3}} = 10\cdot\ln\left(\frac{4}{3}\right)^{1/2} = 10\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{4}{3}$$

$$= 5\cdot\ln\frac{4}{3}$$

Also $W_f =]-\infty\,;\, 5\cdot\ln\frac{4}{3}[= D_{f^{-1}}$