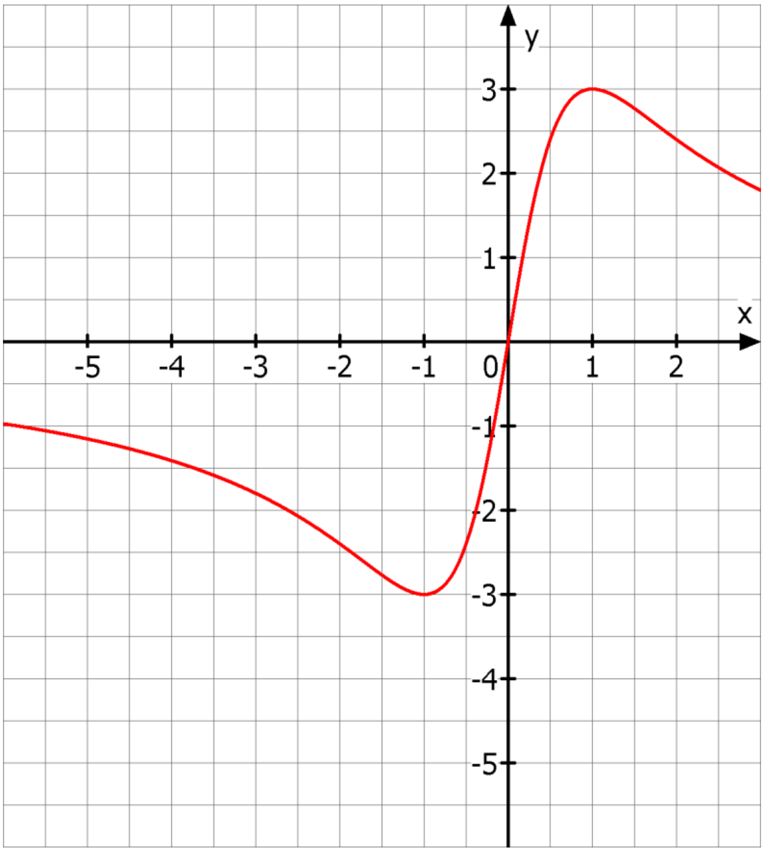
Q11 * Mathematik * Umkehrfunktionen

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

   a) Bestimmen Sie alle Bereiche, in denen f umkehrbar ist und ermitteln Sie den zugehörigen Funktionsterme für den Bereich $]-\infty\,;\,-1]$.

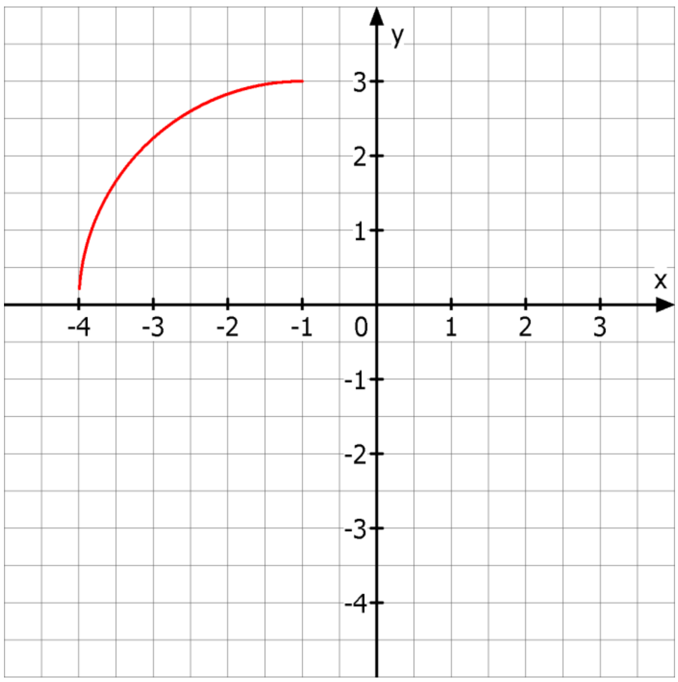
   b) Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f.
   Tragen Sie die Graphen der in a berechneten Umkehrfunktion in das Diagramm ein!



2. Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x) = \sqrt{8 - 2x - x^2}$ mit $D_g = [-4\,;\,-1]$ umkehrbar ist.

   a) Bestimmen Sie den Term der zugehörigen Umkehrfunktion.

   b) Das Bild zeigt den Graph von g.
   Tragen Sie den Graph der zugehörigen Umkehrfunktion in das Diagramm ein.



Q11 * Mathematik * Umkehrfunktionen * Lösungen

1. a) $f'(x) = \frac{6(x^2+1) - 6x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6 - 6x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{6(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{6(1-x)\cdot(1+x)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \iff (1-x)\cdot(1+x) = 0 \iff x_1 = -1\,;\, x_2 = 1$ mit TIP$(-1/-3)$ und HOP$(1/3)$

f ist streng monoton fallend in $]-\infty\,;\,-1]$ und in $[1\,;\,\infty[$

sowie streng monoton steigend in $[-1\,;\,1]$ und damit in diesen Bereichen umkehrbar.

$f_1:\ y = \frac{6x}{x^2+1}$ mit $D_{f_1} = [-\infty\,;\,-1]$ b)

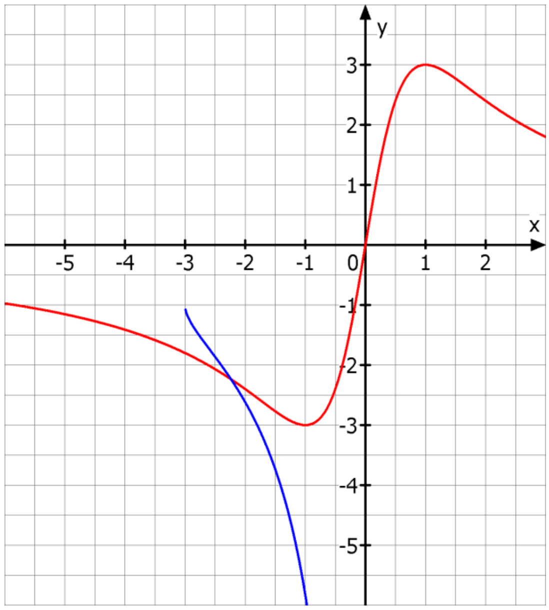
und $W_{f_1} = [-3\,;\,0[$

$y_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4x^2}}{2x} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - x^2}}{x}$

Hier gilt $f_1^{-1}(x) = \frac{3 + \sqrt{9 - x^2}}{x}$

mit $x \in D_{f_1^{-1}} = W_{f_1} = [-3\,;\,0[$

(und $W_{f_1^{-1}} = D_{f_1} =]-\infty\,;\,-1]$)



2. a) $g(x) = \sqrt{8 - 2x - x^2} = \sqrt{-(x+4)\cdot(x-2)}$ d.h. $D_g = [-4\,;\,-1] \subset D_{g,max} = [-4;\,2]$

$g'(x) = \frac{-2 - 2x}{2 \cdot \sqrt{8 - 2x - x^2}} = \frac{-(1+x)}{\sqrt{8 - 2x - x^2}}$ und $g'(x) = 0 \iff x_1 = -1$

$g'(x) > 0$ für $x \in]-4;\,-1]$, also ist g in D_g streng monoton steigend und damit umkehrbar.

$g:\ y = \sqrt{8 - 2x - x^2}$; $D_g = [-4\,;\,-1]$ b)

$g^{-1}:\ x = \sqrt{8 - 2y - y^2} \Rightarrow$

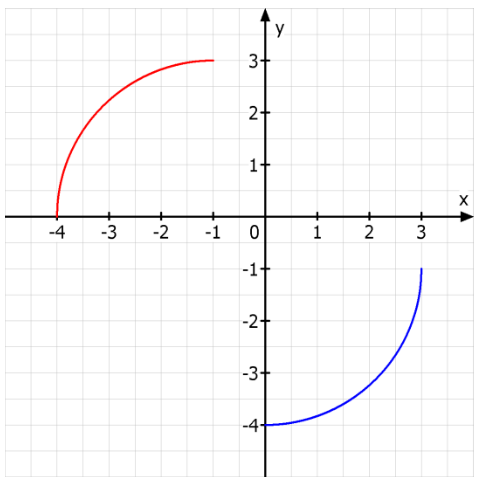
$x^2 = 8 - 2y - y^2 \Rightarrow y^2 + 2y + x^2 - 8 = 0$

$y_{1/2} = \frac{1}{2}\cdot(-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot(x^2 - 8)}\,)$

$y_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1 - (x^2 - 8)} = -1 \pm \sqrt{9 - x^2}$

Wegen $W_{g^{-1}} = D_g = [-4\,;\,-1]$ folgt

$g^{-1}(x) = -1 - \sqrt{9 - x^2}$ mit $x \in [0;3]$



Q11 * Mathematik * Umkehrfunktionen

Ausführlichere Lösung zur Aufgabe 2

$f(x) = \sqrt{8 - 2x - x^2}$ $\qquad D_f = [-4; -1]$

$f(x) = \sqrt{8 + 1 - (1 + 2x + x^2)} = \sqrt{9 - (x+1)^2}$ $\quad$ (also $-3 \leqq x+1 \leqq 3$)
$\qquad -4 \leqq x \leqq 2$

a) $f'(x) = \frac{1}{2}(8 - 2x - x^2)^{-1/2} \cdot (-2 - 2x) = \frac{-(1+x)}{\sqrt{8 - 2x - x^2}}$

für $-4 \leqq x \leqq -1$ ist $f'(x) \geq 0$

also $f(x)$ in $[-4; -1]$ str. mon. steigend

und damit umkehrbar

$f(x) = \sqrt{9 - (x+1)^2}$ $\quad$ mit $D_f = [-4; -1]$

und $W_f = [0; 3]$

f^{-1}: $\quad x = \sqrt{9 - (y+1)^2}$

$x^2 = 9 - (y+1)^2 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 9 - x^2 \Leftrightarrow$

$y_{1/2} + 1 = \pm\sqrt{9 - x^2}$

$f^{-1}_{1/2}(x) = y_{1/2} = -1 \pm \sqrt{9 - x^2}$ $\quad$ wegen $W_{f^{-1}} = D_f = [-4; -1]$

folgt

$f^{-1}(x) = -1 - \sqrt{9 - x^2}$ $\quad$ (mit $x \in D_{f^{-1}} = W_f = [0; 3]$