Q11 * Mathematik * Aufgaben zur Ableitung

Folgende wichtige Ableitungs-Regeln sind bekannt:

$\left(a\cdot f(x) + b\cdot g(x) \right)' = a\cdot f'(x) + b\cdot g'(x)$ (Linearität der Ableitung)

$\left(f(x)\cdot g(x) \right)' = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x)$ (Produktregel)

$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right)' = \dfrac{g(x)\cdot f'(x) - g'(x)\cdot f(x)}{g(x)^2}$ (Quotientenregel)

$\left(f(g(x)) \right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$ (Kettenregel)

Bekannte Ableitungen wichtiger Funktionen

$f(x) = x^r \quad (r \in R) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = r\cdot x^{r-1}$

$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x)$ und $f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin(x)$

Aufgaben

1. Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$.
   Bestimmen Sie – sofern möglich – alle Punkte des Graphen G_f mit waagrechter Tangente.

   a) $f(x) = 3x^5 + 10x^3 - 45x$ b) $f(x) = 3x^5 + 5x^3 - 90x$

   c) $f(x) = x\cdot(x^2 - 2x)^3$ d) $f(x) = (x+1)^3\cdot(x^3 + x^2)^2$

   e) $f(x) = \sqrt{x^2+1}\cdot(x^2 - x)$ f) $f(x) = \sqrt{2x}\cdot(x^3 + 3x)$

   g) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{\sqrt{x^2+1}}$ h) $f(x) = \dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+1}}$

2. Bestimmen Sie alle Nullstellen und Extremwerte der Funktion f im Intervall $[0\,;\,2\pi]$.

   a) $f(x) = 2\cdot\sin(x)$ b) $f(x) = 0{,}5\cdot\cos(x)$

   c) $f(x) = (\sin(x))^2$ d) $f(x) = (\sin(x))^2 + (\cos(x))^2$

   e) $f(x) = 2\cdot\sin(0{,}5x + \pi)$ f) $f(x) = 3\cdot\sin(\frac{x}{3} + \pi)$

   g) $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$; $D_f = ?$ h) $f(x) = \cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$; $D_f = ?$

3. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P(0{,}5\cdot\pi\ /\ ?)$ des Graphen der Funktion $f(x) = 2\cdot\sin(3\cdot x - 0{,}25\cdot\pi)$.

4. Bestimmen Sie alle Schnittpunkte der Graphen von $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ im Intervall $[0\,;\,\pi]$.
   Unter welchem Winkel schneiden sich die Graphen dabei?

Q11 * Mathematik * Aufgaben zur Ableitung * Lösungen

1. a) $f(x) = 3x^5 + 10x^3 - 45x \;\Rightarrow\; f'(x) = 15x^4 + 30x^2 - 45 = 15\cdot(x^4 + 2x^2 - 3)$

$f'(x) = 15\cdot(x^2-1)\cdot(x^2+3)$ und $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; x_{1/2} = \pm 1$, $y_{1/2} = \mp 32$

b) $f(x) = 3x^5 + 5x^3 - 90x \;\Rightarrow\; f'(x) = 15x^4 + 15x^2 - 90 = 15\cdot(x^4 + x^2 - 6)$

$f'(x) = 15\cdot(x^2-2)\cdot(x^2+3)$; $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$; $y_{1/2} = \mp 68\cdot\sqrt{2}$

c) $f(x) = x\cdot(x^2-2x)^3 \;\Rightarrow\; f'(x) = (x^2-2x)^3 + x\cdot 3\cdot(x^2-2x)^2\cdot(2x-2) =$

$(x^2-2x)^2\cdot[7x^2-8x] = x^2\cdot(x-2)^2\cdot x\cdot(7x-8) = x^3\cdot(x-2)^2\cdot(7x-8)$

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0$, $y_1 = 0$ (dreifache NSt.) , $x_2 = 2$, $y_2 = 0$ (zweifache NSt.) ,

$x_3 = \frac{8}{7}$, $y_3 = -\frac{6^3\cdot 8^4}{7^7} \approx -1{,}07$

d) $f(x) = (x+1)^3\cdot(x^3+x^2)^2 \;\Rightarrow$

$f'(x) = 3\cdot(x+1)^2\cdot(x^3+x^2)^2 + (x+1)^3\cdot 2\cdot(x^3+x^2)\cdot(3x^2+2x) = \ldots =$

$(x+1)^2\cdot(x^3+x^2)\cdot[9x^3+13x^2+4x] = (x+1)^2\cdot x^2\cdot(x+1)\cdot x\cdot[9x^2+13x+4] =$

$x^3\cdot(x+1)^3\cdot 9\cdot(x+1)\cdot(x+\frac{4}{9}) = 9\cdot x^3\cdot(x+1)^4\cdot(x+\frac{4}{9})$

4-fache NSt. bei $x_1 = -1$ ($y_1 = 0$) , 3-fache NSt. bei $x_2 = 0$ ($y_2 = 0$) ,

einfache NSt. bei $x_3 = -\frac{4}{9}$ ($y_3 = \frac{5^5\cdot 4^4}{9^9} \approx 0{,}002$)

e) $f(x) = \sqrt{x^2+1}\cdot(x^2-x) \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2-x) + \sqrt{x^2+1}\cdot(2x-1) = \ldots =$

$\frac{x\cdot(x^2-x) + (x^2+1)\cdot(2x-1)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{3x^3-2x^2+2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

Lösungen von $f'(x) = 0$ nicht erkennbar, obwohl es mindestens eine Lösung geben muss.

f) $f(x) = \sqrt{2x}\cdot(x^3+3x) \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{2}{2\cdot\sqrt{2x}}\cdot(x^3+3x) + \sqrt{2x}\cdot(3x^2+3) = \ldots =$

$\frac{(x^3+3x) + 2x\cdot(3x^2+3)}{\sqrt{2x}} = \frac{7x^3+9x}{\sqrt{2x}} = \frac{\sqrt{x}\cdot(7x^2+9)}{\sqrt{2}}$

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f'(x) = 0$ waagrechte Tangente bei (0/0).

g) $f(x) = \frac{x^2-x}{\sqrt{x^2+1}} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}\cdot(2x-1) - \frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2-x)}{(x^2+1)} =$

$\frac{(x^2+1)\cdot(2x-1) - x\cdot(x^2-x)}{\sqrt{x^2+1}\cdot(x^2+1)} = \frac{x^3+2x-1}{\sqrt{x^2+1}\cdot(x^2+1)}$

Lösungen von $f'(x) = 0$ nicht erkennbar, obwohl es mindestens eine Lösung geben muss.

Wegen $f'(0) = -1 < 0$ und $f'(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ gibt es in $[\,0\,;\,1\,]$ eine waagrechte Tangente.

h) $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+1}} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{2\cdot\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}\cdot(2x+3)}{x^2+1} = \frac{2-3x}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = \frac{2}{3}$; $y_1 = \sqrt{13}$

2\. a) $f(x) = 2\cdot\sin(x)$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_2 = \pi$; $x_3 = 2\pi$

$f'(x) = 2\cdot\cos(x)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_4 = \frac{\pi}{2}$ HOP($\frac{\pi}{2}$; 2); $x_5 = \frac{3\cdot\pi}{2}$ TIP($\frac{3\pi}{2}$; -2)

b) $f(x) = 0{,}5\cdot\cos(x)$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{3\cdot\pi}{2}$

$f'(x) = -0{,}5\cdot\sin(x)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0$ HOP($0/0{,}5$); $x_4 = \pi$ TIP($\pi/-0{,}5$);
$x_5 = 2\pi$ HOP($2\pi/0{,}5$)

c) $f(x) = (\sin(x))^2$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_2 = \pi$; $x_3 = 2\pi$

$f'(x) = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_2 = \pi$; $x_3 = 2\pi$; $x_4 = 0{,}5\pi$; $x_5 = 1{,}5\pi$
Tiefpunkte bei $(0/0)$, $(\pi/0)$ und $(2\pi/0)$, Hochpunkte bei $(0{,}5\pi/1)$ und $(1{,}5\pi/1)$

d) $f(x) = (\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$ also keine Nullstellen!
$f'(x) = 0$ [$f'(x) = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) + 2\cdot\cos(x)\cdot(-\sin(x)) = 0$]
(Graph hat an allen Punkten waagrechte Tangenten.)

e) $f(x) = 2\cdot\sin(0{,}5x + \pi)$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}5x_z + \pi = z\cdot\pi$ mit $z \in Z \Leftrightarrow$
$x_z = 2\cdot(z-1)\cdot\pi$ mit $z \in Z$; hier $x_1 = 0$, $x_2 = 2\pi$
$f'(x) = 2\cdot\cos(0{,}5x + \pi)\cdot 0{,}5 = \cos(0{,}5x + \pi)$;
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}5x_z + \pi = \frac{2z+1}{2}\cdot\pi$ mit $z \in Z \Leftrightarrow x_z = (2z-1)\cdot\pi$; hier $x_3 = \pi$ (TIP)

f) $f(x) = 3\cdot\sin(\frac{x}{3} + \pi)$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_z}{3} + \pi = z\cdot\pi$ mit $z \in Z \Leftrightarrow x_z = 3\cdot(z-1)\cdot\pi$;
hier nur $x_1 = 0$;
$f'(x) = 3\cdot\cos(\frac{x}{3} + \pi)\cdot\frac{1}{3} = \cos(\frac{x}{3} + \pi)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_z}{3} + \pi = \frac{(2z+1)\cdot\pi}{2}$ mit $z \in Z \Leftrightarrow$
$x_z = \frac{3\cdot(2z-1)\cdot\pi}{2}$ hier $x_1 = \frac{3\cdot\pi}{2}$ TIP($\frac{3\cdot\pi}{2}$; -3)

g) $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$; $D_f = R \setminus \{ \frac{(2z+1)\cdot\pi}{2} \ / \ z \in Z \}$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_2 = \pi$; $x_3 = 2\pi$
$$f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{(\cos(x))^2} = \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$$
$f'(x) = 0$ hat keine Lösung, denn $f'(x) \geq 1$ für alle $x \in R$.

h) $f(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$; $D_f = R \setminus \{ z\cdot\pi \ / \ z \in Z\}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{3\cdot\pi}{2}$
$$f'(x) = \frac{\sin(x)\cdot(-\sin(x))) - \cos(x)\cdot\cos(x)}{(\sin(x))^2} = -\frac{(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2}{(\sin(x))^2} = -\frac{1}{(\sin(x))^2} =$$
$f'(x) = -1 - (\cot(x))^2$
$f'(x) = 0$ hat keine Lösung, denn $f'(x) \leq -1$ für alle $x \in R$.

3. $f(x) = 2 \cdot \sin(3 \cdot x - 0{,}25 \cdot \pi)$; $P(0{,}5\pi ; y_P)$

$y_P = f(0{,}5\pi) = 2 \cdot \sin(3 \cdot 0{,}5\pi - 0{,}25 \cdot \pi) = 2 \cdot \sin(1{,}25\pi) = -2 \cdot 0{,}5 \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2}$

$f'(x) = 2 \cdot \cos(3 \cdot x - 0{,}25 \cdot \pi) \cdot 3 = 6 \cdot \cos(3 \cdot x - 0{,}25 \cdot \pi)$

$m = f'(0{,}5\pi) = 6 \cdot \cos(1{,}25 \cdot \pi) = -3 \cdot \sqrt{2}$

Tangente: $g(x) = m \cdot x + t$ mit $m = -3 \cdot \sqrt{2}$ und $g(x_P) = y_P \Rightarrow$

$-\sqrt{2} = -3 \cdot \sqrt{2} \cdot 0{,}5\pi + t \Rightarrow t = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 0{,}5\pi - \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot (1{,}5\pi - 1)$ also

$g(x) = -3 \cdot \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{2} \cdot (1{,}5\pi - 1)$; $g(x) \approx -4{,}24 \cdot x + 5{,}25$

4. $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$;
Schnittpunkte der Graphen in $[0 ; \pi]$:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1 \Leftrightarrow \tan(x) = 1 \Leftrightarrow$

$x_1 = 0{,}25 \cdot \pi$; $y_1 = 0{,}5 \cdot \sqrt{2}$ also nur ein Schnittpunkt $S(0{,}25 \cdot \pi ; 0{,}5 \cdot \sqrt{2})$

Schnittwinkel φ der Tangenten:

$f'(x) = \cos(x)$ und $g'(x) = -\sin(x)$;

$m_1 = f'(0{,}25\pi) = 0{,}5 \cdot \sqrt{2}$ und $m_2 = g'(0{,}25\pi) = -0{,}5 \cdot \sqrt{2}$

$$\tan(\varphi) = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| = \left| \frac{\sqrt{2}}{1 - 0{,}5} \right| = \left| \frac{\sqrt{2}}{0{,}5} \right| = 2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \varphi = 70{,}528...^{\circ} \approx 70{,}5^{\circ}$$