Q11 * Mathematik m4 * 1. Klausur am 7.12.2011

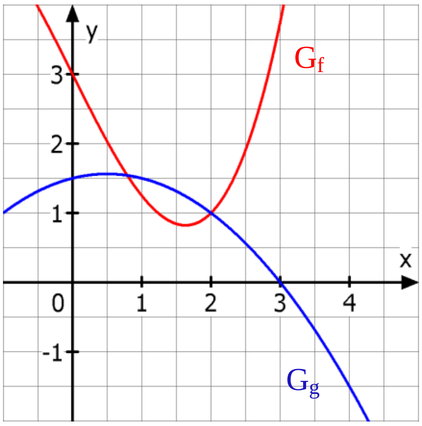
1. Berechnen Sie die Steigung des Graphen der Funktion f mit $f(x) = 2x^3 - 1$ an der Stelle $x_1 = 2$ mit Hilfe des zugehörigen Differentialquotienten.

2. Peter behauptet, dass sich die Graphen der Funktionen f und g im Punkt P(2/1) senkrecht schneiden (siehe Bild!).

   Es gilt:

   $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^3 - 2x + 3$ und $g(x) = \frac{1}{4} \cdot (6 + x - x^2)$

   Prüfen Sie Peters Behauptungen mit geeigneten Rechnungen!



3. Die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{2 - 2x}$ soll untersucht werden.

   a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs.

   b) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der schräg liegenden Asymptote des Graphen von f für $x \to \pm\infty$.

   c) Berechnen Sie $f'(x)$.

   [Ergebnis: $f'(x) = \dfrac{3 + 2x - x^2}{2 \cdot (1 - x)^2}$]

   Bestimmen Sie nun alle Hoch-, Tief- und Terrassenpunkte des Graphen von f.

   d) Skizzieren Sie unter Verwendung Ihrer Ergebnisse den Graphen von f.

4. Gegeben ist die Funktion $g(x) = (2x + 4)^3 \cdot (0{,}3x - 0{,}6)$.

   a) Berechnen Sie die Ableitungsfunktion von g mit Hilfe bekannter Regeln.

   (Hinweis: Funktionsterm g(x) nicht ausmultiplizieren sondern Kettenregel verwenden!)

   [Ergebnis: $g'(x) = 9{,}6 \cdot (x + 2)^2 \cdot (x - 1)$]

   b) Bestimmen Sie nun alle Stellen der Funktion mit horizontaler Tangente. Begründen Sie, warum sich nur bei $x_1 = -2$ ein Terrassenpunkt des Graphen befindet.

Aufgabe	1	2	3a	b	c	d	4a	b	Summe
Punkte	6	6	4	4	8	4	4	4	40

Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * Mathematematik m4 * 1. Klausur am 7.12.2011 * Lösung

1. $f(x) = 2x^3 - 1$ und $f(2) = 2\cdot 8 - 1 = 15$

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{2x^3 - 1 - 15}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{2x^3 - 16}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x^3 - 8)}{x - 2} =$$

$$\overset{*}{=} \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)\cdot(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2} 2\cdot(x^2 + 2x + 4) = 2\cdot(4+4+4) = 24$$

* Polynomdivision $(x^3 - 8) : (x-2) = x^2 + 2x + 4$ ☺

2. $f(2) = \frac{1}{4}\cdot 2^3 - 2\cdot 2 + 3 = 1$ und $g(2) = \frac{1}{4}\cdot(6 + 2 - 2^2) = 1$ (Schnittpunkt P stimmt!)

$f'(x) = \frac{3}{4}\cdot x^2 - 2$ und damit $f'(2) = \frac{3}{4}\cdot 2^2 - 2 = 1 = m_1$

$g'(x) = \frac{1}{4}\cdot(1 - 2x)$ und damit $g'(2) = \frac{1}{4}\cdot(1 - 4) = -\frac{3}{4} = m_2$

$m_1 \cdot m_2 = 1\cdot(-\frac{3}{4}) = -\frac{3}{4} \neq -1 \Rightarrow$ Die Graphen schneiden sich nicht senkrecht in P.

3. a) $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2 - 2x}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

NSt.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x\cdot(x+3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 ; x_2 = -3 ; y_1 = y_2 = 0$

$$\lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} 1} \frac{x^2 + 3x}{2(2-x)} = "\frac{4}{2\cdot(\mp 0)}" = \mp\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + 3x}{2 - 2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+3}{\frac{2}{x} - 2} = "\frac{\pm\infty}{0 - 2}" = \mp\infty$$

b) $f(x) = (x^2 + 3x) : (-2x + 2) = -\frac{1}{2}x - 2 + \frac{4}{-2x - 2} = -\frac{1}{2}x - 2 - \frac{2}{x+1}$

Schräg liegende Asymptote: $y = -\frac{1}{2}x - 2$ für $x \to \pm\infty$

c) $$f'(x) = \frac{(2-2x)\cdot(2x+3) - (x^2 + 3x)\cdot(-2)}{(2-2x)^2} = \frac{4x + 6 - 4x^2 - 6x + 2x^2 + 6x}{(2-2x)^2} =$$

$$= \frac{4x + 6 - 2x^2}{(2-2x)^2} = \frac{2\cdot(3 + 2x - x^2)}{2\cdot 2\cdot(1-x)^2} = \frac{3 + 2x - x^2}{2\cdot(1-x)^2}$$

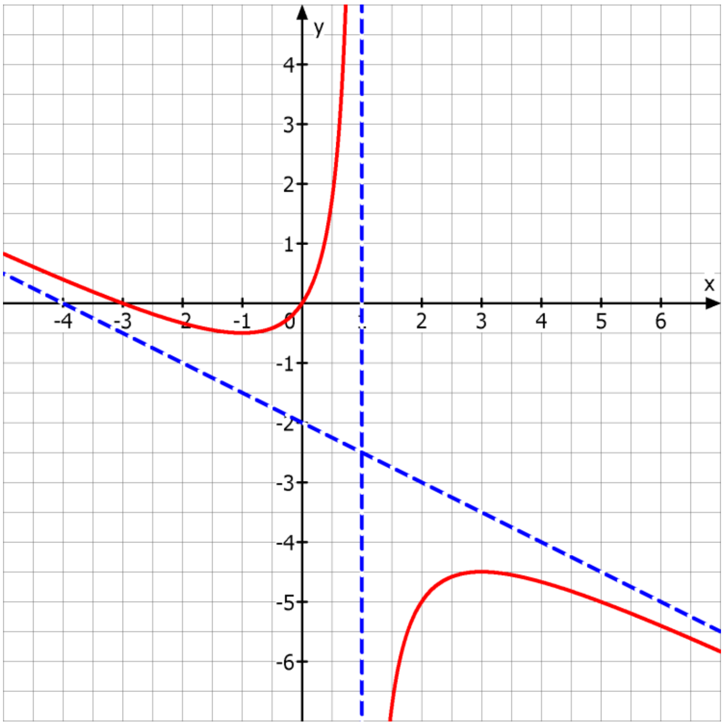
Horizontale Tangenten: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-3)\cdot(x+1) = 0 \Leftrightarrow x_3 = 3 ; x_4 = -1 ; y_3 = -4{,}5 ; y_4 = -\frac{1}{2}$

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
$f'(x) = \frac{-(x-3)\cdot(x+1)}{2\cdot(1-x)^2}$	< 0	0	> 0	---	> 0	0	< 0

Also Tiefpunkt $(-1 / -0{,}5)$ und Hochpunkt $(3 / -4{,}5)$

3. d)



4. a) $g(x) = (2x+4)^3 \cdot (0{,}3x - 0{,}6) \;\Rightarrow$

$g'(x) = 3 \cdot (2x+4)^2 \cdot 2 \cdot (0{,}3x - 0{,}6) + (2x+4)^3 \cdot 0{,}3 =$

$= (2x+4)^2 \cdot [6 \cdot (0{,}3x - 0{,}6) + (2x+4) \cdot 0{,}3] = (2x+4)^2 \cdot [1{,}8x - 3{,}6 + 0{,}6x + 1{,}2] =$

$= (2x+4)^2 \cdot [2{,}4x - 2{,}4] = 4 \cdot (x+2)^2 \cdot 2{,}4 \cdot (x-1) = 9{,}6 \cdot (x+2)^2 \cdot (x-1)$

b) $g'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+2)^2 \cdot (x-1) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+2)^2 = 0$ oder $(x-1) = 0$ d.h.

$x_1 = -2$ oder $x_2 = 1$

x_1 ist eine doppelte Nullstelle der Ableitung, d.h. dort ändert sich das Vorzeichen der Ableitung nicht. Deshalb liegt an der Stelle x_1 ein Terrassenpunkt des Graphen.
Bei x_2 handelt es sich um einfache Nullstellen mit Vorzeichenwechsel und deshalb befindet sich dort ein Hoch- oder Tiefpunkt des Graphen.