Q11 * Mathematik m4
Klausur im Kurshalbjahr 11/2 am 25.04.2012 * Gruppe B

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{2x^2}{\sqrt{3+x^2}}$ und $x \in \mathbb{R}$.

   Bestimmen Sie alle Intervalle, in denen f streng monoton fällt.

2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+9}$ und $x \in D_f = [\,3\,;\,\infty\,[$.

   a) Begründen Sie, dass die Funktion f im angegebenen Definitionsbereich umkehrbar ist. Bestimmen Sie den zugehörigen Wertebereich W_f.
   b) Bestimmen Sie den Funktionsterm der zugehörigen Umkehrfunktion f^{-1}.

3. Im $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(3/2/1)$, $B(-1/6/3)$, $C(7/0/5)$ und $S(8/9/2)$ gegeben.

   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig mit Basis $[BC]$ ist und berechnen Sie die Größe des Winkels $\alpha = \sphericalangle BAC$.
   b) Das Dreieck ABC lässt sich zu einer Raute fortsetzen. Bestimmen Sie die Koordinaten des vierten Punktes D der Raute sowie des Schnittpunktes M der Diagonalen.
   [Teilergebnis: M(3/3/4)]
   c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt $F_R = F_{Raute}$ der Raute aus 3b.
   [Ergebnis: $F_{Raute} = 4 \cdot \sqrt{65}$]
   d) Das Dreieck ABC legt die Ebene E fest.
   Zeigen Sie, dass der Punkt $S(8/9/2)$ relativ zur Ebene E senkrecht über dem Mittelpunkt M der Raute liegt.
   Berechnen Sie nun möglichst einfach das Volumen der Pyramide mit der Raute als Grundfläche und der Spitze bei S.
   e) Gesucht ist ein von S verschiedener Punkt T, so dass die Pyramide mit der Raute als Grundfläche und T als Spitze den gleichen Volumeninhalt wie die Pyramide aus 3d besitzt. Bestimmen Sie mögliche Koordinaten von T.

Aufgabe	1	2a	b	3a	b	c	d	e	Summe
Punkte	6	8	5	4	4	4	6	2	39

Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * Mathematik m4
Klausur im Kurshalbjahr 11/2 am 25.04.2012 * Gruppe B * Lösung

1. $f(x) = \dfrac{2x^2}{\sqrt{3+x^2}} \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{\sqrt{3+x^2}\cdot 4x - 2x^2\cdot\dfrac{2x}{2\cdot\sqrt{3+x^2}}}{3+x^2} = \dfrac{(3+x^2)\cdot 4x - 2x^2\cdot x}{(3+x^2)\cdot\sqrt{3+x^2}}$

   $f'(x) = \dfrac{12x + 4x^3 - 2x^3}{(3+x^2)\cdot\sqrt{3+x^2}} = \dfrac{12x + 2x^3}{(3+x^2)\cdot\sqrt{3+x^2}} = \dfrac{2x\cdot(6+x^2)}{(3+x^2)\cdot\sqrt{3+x^2}}$

   $f'(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; 2x\cdot(6+x^2) < 0 \;\Leftrightarrow\; x < 0$,

   also ist f nur in $\mathbb{R}_o^- =]-\infty\,;\,0\,]$ streng monoton fallend.

2. a) $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+9} \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{(x^2+9)\cdot 6 - 6x\cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \dfrac{6x^2 + 54 - 12x^2}{(x^2+9)^2} = \dfrac{54 - 6x^2}{(x^2+9)^2}$

   $f'(x) = \dfrac{6\cdot(9-x^2)}{(x^2+9)^2} = \dfrac{6\cdot(3-x)\cdot(3+x)}{(x^2+9)^2} < 0$ für $x > 3$,

   f ist also in $D_f = [\,3\,;\,\infty\,[$ streng monoton fallend und damit umkehrbar.

   $f(3) = \dfrac{6\cdot 3}{3^2+9} = \dfrac{6\cdot 3}{18} = 1$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6}{x + 9/x} = \text{"}\dfrac{6}{\infty}\text{"} = 0^+ \;\Rightarrow\; W_f =]\,0\,;1]$

   b) $f^{-1}:\quad x = \dfrac{6y}{y^2+9} \;\Rightarrow\; x\cdot y^2 - 6\cdot y + 9x = 0 \;\Rightarrow$

   $y_{1/2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot x\cdot 9x}}{2x} = \dfrac{3 \pm 3\cdot\sqrt{1-x^2}}{x}$ und $W_{f^{-1}} = D_f = [\,3\,;\,\infty\,[\;\Rightarrow$

   $f^{-1}(x) = \dfrac{3 + 3\cdot\sqrt{1-x^2}}{x}$ mit $D_{f^{-1}} = W_f =]\,0\,;1\,]$

3. Im $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(3/2/1)$, $B(-1/6/3)$, $C(7/0/5)$ und $S(8/9/2)$

   a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \overline{AB} = \sqrt{16+16+4} = 6 = \sqrt{16+4+16} = \overline{AC}$

   $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}} = \dfrac{-16-8+8}{6\cdot 6} = -\dfrac{4}{9} \;\Rightarrow\; \alpha = 116{,}38...^\circ \approx 116{,}4^\circ$

   b) $\vec{D} = \vec{C} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7-4 \\ 0+4 \\ 5+2 \end{pmatrix} \Rightarrow D(3/4/7)$; $\vec{M} = \dfrac{1}{2}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) \;\Rightarrow\; M(\dfrac{6}{2}/\dfrac{6}{2}/\dfrac{8}{2}) = M(3/3/4)$

   c) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+4 \\ 8+16 \\ 8-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 24 \\ -8 \end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

   $F_{Raute} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 4\cdot\sqrt{25+36+4} = 4\cdot\sqrt{65}$

   d) $\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 8-3 \\ 9-3 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{MS}\circ\overrightarrow{AB} = 5\cdot(-4) + 6\cdot 4 + (-2)\cdot 2 = 0$ also $\overrightarrow{MS} \perp \overrightarrow{AB}$

   und $\overrightarrow{MS}\circ\overrightarrow{AC} = 5\cdot 4 + 6\cdot(-2) + (-2)\cdot 4 = 0$ also $\overrightarrow{MS} \perp \overrightarrow{AC}$ und damit gilt $\overrightarrow{MS} \perp$ Ebene E .

   $V_{Pyramide} = \dfrac{1}{3}\cdot F_{Raute}\cdot\overline{MS} = \dfrac{1}{3}\cdot 4\sqrt{65}\cdot\sqrt{25+36+4} = \dfrac{1}{3}\cdot 4\sqrt{65}\cdot\sqrt{65} = \dfrac{260}{3}$

   e) T muss in einer zur Ebene E parallelen Ebene durch den Punkt S liegen,
   z.B. $\vec{T} = \vec{S} + \overrightarrow{AC} \;\Rightarrow\; T(8-4/9+4/2+2) = T(4/13/4)$