Q11 * Mathematik   * Anwendungsaufgaben zur Ableitung einer Funktion

Physik

Für die Geschwindigkeit v eines Körpers gilt: $v(t_o) \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_o}{t_1 - t_o}$

Mit mathematischer Grenzwertbildung folgt: $v(t_o) = \lim\limits_{t_1 \to t_o} \frac{x_1 - x_o}{t_1 - t_o} = \frac{dx}{dt}(t_o) = \dot{x}(t_o)$

$\dot{x}(t_o)$ gibt dabei die Ableitung der Orts-Funktion $x = x(t)$ nach der Zeit t an.

Entsprechend gilt für die Beschleunigung a dieses Körpers:

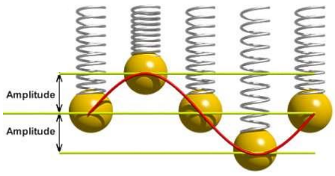
$a(t_o) \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_o}{t_1 - t_o}$ und damit $a(t_o) = \lim\limits_{t_1 \to t_o} \frac{v_1 - v_o}{t_1 - t_o} = \frac{dv}{dt}(t_o) = \dot{v}(t_o) = \ddot{x}(t_o)$

$\ddot{x}(t_o)$ gibt dabei die zweite Ableitung der Orts-Funktion $x = x(t)$ an.

Mit dem zweiten newtonschen Gesetz gilt also: $F(t) = m \cdot a(t) = m \cdot \dot{v}(t) = m \cdot \ddot{x}(t)$

1. a) Begründen Sie, dass für eine Bewegung (in x-Richtung) mit der konstanten Beschleunigung a (in x-Richtung) die Ortsfunktion $x = x(t)$ folgendermaßen lautet:
   $x = x(t) = x_o + v_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$. Welche Bedeutung haben dabei x_o und v_o ?
   b) Ein Ball der Masse 500g wird mit der Anfangsgeschwindigkeit 15 ms^{-1} nach oben geworfen. Welche Höhe und Geschwindigkeit hat der Ball nach 1,0s ? Welche maximale Höhe erreicht er und wann schlägt er wieder am Boden auf? (g = 10 ms^{-2})

2. Die Auslenkung y eines Federpendels, das mit der Amplitude A = 5,0cm und der Schwingungsdauer T = 3,0s schwingt, lautet
   $y(t) = 5{,}0cm \cdot \sin(\frac{2\pi}{3{,}0s} \cdot t)$.



   a) Bestimmen Sie die maximale Geschwindigkeit nach „oben”. Wann tritt diese Geschwindigkeit jeweils auf?
   b) Bestimmen Sie zum Zeitpunkt $t_1 = 2{,}6s$ die Auslenkung $y(t_1)$, die Geschwindigkeit $v(t_1)$ und die Beschleunigung $a(t_1)$.
   c) Welche maximale Beschleunigung erfährt der Pendelkörper? Bei welcher Auslenkung tritt diese maximale Beschleunigung auf?

Wirtschaft

3. Die Herstellungskosten einer Anzahl x gleicher Geräte wird durch die Kostenfunktion K(x) beschrieben.
   Es gelte z.B. $K(x) = (0{,}0015\,x^3 - 1{,}8\,x^2 + 820\,x + 5000)$ €
   a) Überlegen Sie, welche Kosten durch jeden einzelnen der in K(x) auftretenden Terme beschrieben wird. (Vorzeichen beachten!)
   b) Die Ableitung K´(x) wird Grenzkostenfunktion genannt.
   Begründen Sie, dass K´(x) angenähert angibt, welche Kosten für die Herstellung des Geräts mit der Nummer x +1 anfallen.
   c) Bestimmen Sie die Grenzkostenfunktion für unser Beispiel.
   Für welche Anzahl x ergeben sich die kleinsten Grenzkosten?
   d) Für welche Anzahl an hergestellten Geräten liegen die Grenzkosten unter 150 € ?

Q11 * Mathematik * Anwendungsaufgaben zur Ableitung einer Funktion

1. a) $x(t)$ setzt sich additiv aus den Teilen x_o (Ort zum Zeitpunkt 0),
$v_o \cdot t$ (Ortszunahme aufgrund der Anfangsgeschwindigkeit v_o) und
$0{,}5 \cdot a \cdot t^2$ (Ortszunahme aufgrund einer konstanten Beschleunigung a) zusammen

b) $x(t) = v_o \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ mit $v_o = 15\frac{m}{s}$ und $g = 9{,}8\frac{m}{s^2} \approx 10\frac{m}{s^2}$

$$x(1{,}0s) = 15\frac{m}{s} \cdot 1{,}0s - \frac{1}{2} \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot (1{,}0s)^2 = 15m - 5{,}0m = 10m$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = v_o - \frac{1}{2} \cdot g \cdot 2t = v_o - g \cdot t \text{ und}$$

$$v(1{,}0s) = 15\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 1{,}0s = 5{,}0\frac{m}{s} \quad \text{(nach oben)}$$

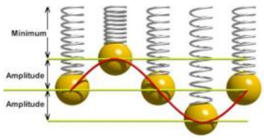
$$x(t_m) = x_{max} \text{ für } v(t_m) = 0 \text{ d.h. } v_o - g \cdot t_m = 0 \Leftrightarrow t_m = \frac{v_o}{g} = \frac{15\frac{m}{s}}{10\frac{m}{s^2}} = 1{,}5s$$

$$x_{max} = x(t_m) = x(1{,}5s) = 15\frac{m}{s} \cdot 1{,}5s - \frac{1}{2} \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot (1{,}5s)^2 = 11{,}25m \approx 11m$$

2. $y(t) = 5{,}0cm \cdot \sin(\frac{2\pi}{3{,}0s} \cdot t)$; $v(t) = \dot{y}(t) = 5{,}0cm \cdot \frac{2\pi}{3{,}0s} \cdot \cos(\frac{2\pi}{3{,}0s} \cdot t) = \frac{10\pi\,cm}{3{,}0s} \cdot \cos(\frac{2\pi}{3{,}0s} \cdot t)$

a) $v_{max} = \frac{10\pi\,cm}{3{,}0s} = 10{,}47...\frac{cm}{s} \approx 10\frac{cm}{s}$ und

v_{max} tritt auf für $\frac{2\pi}{3{,}0s} \cdot t_k = k \cdot 2\pi$ d.h. für $t_k = k \cdot 3{,}0s$ mit $k \in N$



b) $y(t_1) = y(2{,}6s) = 5{,}0cm \cdot \sin(\frac{2\pi}{3{,}0s} \cdot 2{,}6s) = -3{,}715...cm \approx -3{,}7cm$

$$v(t_1) = \frac{10\pi\,cm}{3{,}0s} \cdot \cos(\frac{2\pi}{3{,}0s} \cdot 2{,}6s) = 7{,}007...cm \approx 7{,}0cm$$

$$a(t_1) = \dot{v}(t_1) = -\frac{10\pi\,cm}{3{,}0s} \cdot \frac{2\pi}{3{,}0s} \cdot \sin(\frac{2\pi}{3{,}0s} \cdot 2{,}6s) = -16{,}29...\frac{cm}{s^2} \approx -16\frac{cm}{s^2}$$

c) $a_{max} = \frac{10\pi\,cm}{3{,}0s} \cdot \frac{2\pi}{3{,}0s} = 21{,}93...\frac{cm}{s^2} \approx 22\frac{cm}{s^2}$ tritt immer bei maximaler Auslenkung auf.

3. a) 5000 Fixkosten, z.B. Ausgaben für Gebäude
820x Kosten, die proportional zur Stückzahl sind (Rohstoffe, Energie, Arbeitsleistung)
$-1{,}8x^2$ Einspareffekte durch Mengenrabatte, höherer Output pro Zeit durch Lerneffekte
$0{,}0015x^3$ Merkosten für Überstunden bzw. zusätzliche Lagerhaltung bei hoher Stückzahl

b) $K'(x) \approx \frac{K(x+1) - K(x)}{(x+1) - x} = K(x+1) - K(x) \triangleq$ Kosten für das Gerät $x+1$

c) $K'(x) = (0{,}0045x^2 - 3{,}6x + 820)$ €

kleinste Grenzkosten für $K''(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}009x - 3{,}6 = 0 \Leftrightarrow x = 400$

d) $K'(x) < 150$ € $\Leftrightarrow 0{,}0045x^2 - 3{,}6x + 820 < 150 \Leftrightarrow 0{,}0045x^2 - 3{,}6x + 670 < 0$

Berechne $0{,}0045x^2 - 3{,}6x + 670 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1}{0{,}009} \cdot (3{,}6 \pm \sqrt{3{,}6^2 - 4 \cdot 0{,}0045 \cdot 670})$

$x_1 = 505{,}4...$ und $x_2 = 294{,}5...$ d.h. für eine Stückzahl x mit $295 \le x \le 505$ liegen die Stückkosten unter 150 €.