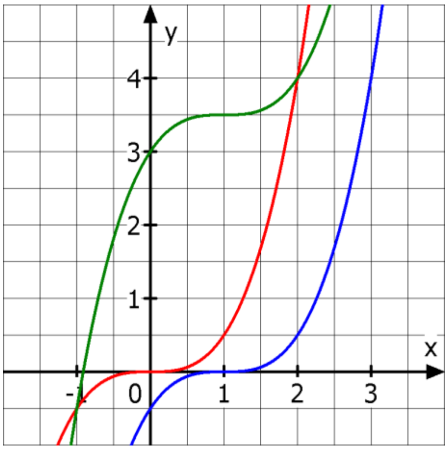
Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Verschieben und Spiegeln von Graphen, Asymptoten

1. Das Bild zeigt die Graphen der drei Funktionen f, g und h.
Es gilt: $f(x) = a \cdot x^3$
Der Graph von g entsteht aus dem Graphen von f durch Verschieben um eine Einheit nach rechts.
Der Graph von h entsteht aus dem Graphen von g durch Verschieben um 3,5 Einheiten nach oben.

   a) Ordnen Sie die Graphen den drei Funktionen zu. Bestimmen Sie den Wert von a und die Funktionsterme g(x) und h(x).

   b) Bestimmen Sie alle Schnittpunkte der Graphen G_f und G_h.

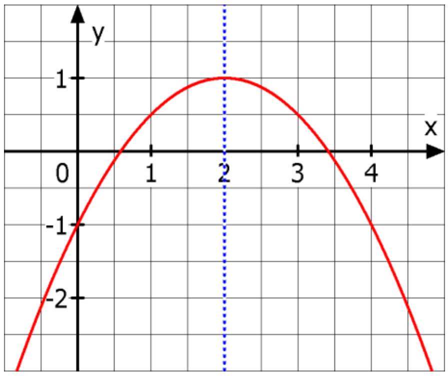


2. Das Bild zeigt den Graphen von $f(x) = -0{,}5x^2 + 2x - 1$.
Peter soll rechnerisch begründen, dass der Graph G_f achsensymmetrisch zur Achse $x = 2$ ist.
Peter findet drei Lösungswege:

   a) Verschiebe G_f um 2 Einheiten nach links und zeige, dass der neue Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

   b) Zeige für jedes $x \in \mathbb{R}^+$: $f(2-x) = f(2+x)$

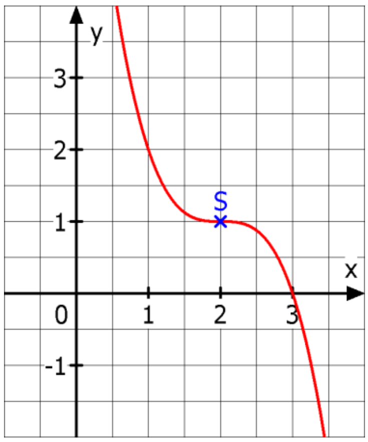
   c) Bringe f(x) durch quadratische Ergänzung in die Scheitelform.



3. Das Bild zeigt den Graphen von $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 9$.
Der Graph scheint punktsymmetrisch zum Punkt S(2/1) zu sein.
Begründen Sie diese Symmetrie rechnerisch.
Es gibt zwei Möglichkeiten:

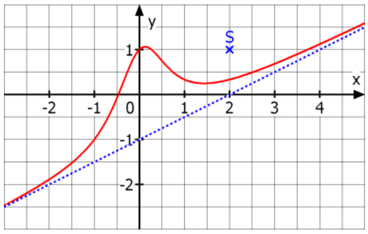
   a) Verschieben Sie G_f um 2 Einheiten nach links und eine Einheit nach unten. Zeigen Sie, dass der neue Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

   b) Zeigen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}^+$: $f(2-x) - 1 = 1 - f(2+x)$
   Begründen Sie, dass durch diese Gleichung die Symmetrie nachgewiesen wird.



4. Das Bild zeigt den Graphen von $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x + 1}{2x^2 + 1}$.

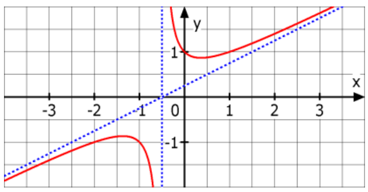
   Zeigen Sie, dass G_f für $x \to \pm\infty$ die Gerade $y = 0{,}5x - 1$ als Asymptote besitzt.



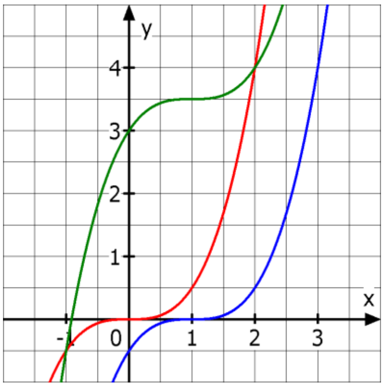
5. Das Bild zeigt G_f von $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{2x + 1}$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$.

   Zeigen Sie, dass G_f für $x \to \pm\infty$ die Gerade $y = 0{,}5x + 0{,}25$ als Asymptote besitzt.

   Hinweis: An der Definitionslücke hat G_f die senkrechte Asymptote $x = -\frac{1}{2}$.



Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Verschieben und Spiegeln von Graphen, Asymptoten
Lösungen



1. Das Bild zeigt die Graphen der drei Funktionen f, g und h.
   1.a) G_f rot ; G_g blau ; G_h grün

   $f(x) = a \cdot x^3$ und $f(1) = 0,5 \Rightarrow 0,5 = a \cdot 1 \Rightarrow f(x) = 0,5 \cdot x^3$

   $g(x) = f(x-1) = 0,5 \cdot (x-1)^3$

   $h(x) = g(x) + 3,5 = 0,5 \cdot (x-1)^3 + 3,5$

   b) $f(x) = h(x) \Leftrightarrow 0,5 \cdot x^3 = 0,5 \cdot (x-1)^3 + 3,5 \Leftrightarrow$

   $0,5x^3 = 0,5x^3 - 1,5x^2 + 1,5x + 3 \Leftrightarrow 1,5x^2 - 1,5x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

   $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1) \cdot (x-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 \,;\, x_2 = 2$

   Schnittpunkte $S_1(-1/-0,5)$ und $S_2(2/4)$

2. a) $f(x) = -0,5x^2 - 2x + 1$ und $g(x) = f(x+2) = -0,5(x+2)^2 - 2(x+2) + 1$

   $g(x) = -0,5x^2 + 2x + 2 - 2x - 4 + 1 = -0,5x^2 + 1$ und

   $g(-x) = -0,5 \cdot (-x)^2 + 1 = -0,5x^2 + 1 = g(x)$

   also G_g achsensymmetrisch zur y-Achse, d.h. G_f achsensymmetrisch zu $x = 2$

   b) Zeige für jedes $x \in R^+$: $f(2-x) = f(2+x)$

   $f(2-x) = -0,5(2-x)^2 + 2 \cdot (2-x) - 1 = -2 + 2x - 0,5x^2 + 4 - 2x - 1 = -0,5x^2 + 4x + 1$

   $f(2+x) = -0,5(2+x)^2 + 2 \cdot (2+x) - 1 = -2 - 2x - 0,5x^2 + 4 + 2x - 1 = -0,5x^2 + 4x + 1$

   c) $f(x) = -0,5x^2 + 2x - 1 = -0,5 \cdot (x^2 - 4x + 4 - 4) - 1 = -0,5 \cdot (x^2 - 4x + 4) + 2 - 1 =$

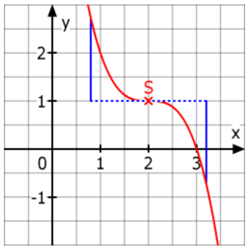
   $-0,5 \cdot (x-2)^2 + 1$, also Scheitel $S(2/1)$ und G_f achsensymmetrisch zu $x = 2$.

3. a) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 9$; $g(x) = f(x+2) - 1 = -(x+2)^3 + 6(x+2)^2 - 12(x+2) + 9 - 1$

   $g(x) = -(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) + 6(x^2 + 4x + 4) - 12x - 24 + 8 = -x^3$

   $g(-x) = -(-x)^3 = x^3 = -g(x)$ also ist G_g punktsymmetrisch zum Ursprung und damit

   G_f punktsymmetrisch zum Punkt $S(2/1)$.



   b) $f(2-x) - 1 = -(2-x)^3 + 6 \cdot (2-x)^2 - 12(2-x) + 9 - 1 =$

   $-(8 - 12x + 6x^2 - x^3) + (24 - 24x + 6x^2) - 24 + 12x + 8 = x^3$

   $1 - f(2+x) = -(f(x+2) - 1) = -g(x) = -(-x^3) = x^3$

   also $f(2-x) - 1 = 1 - f(2+x)$

4. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x + 1}{2x^2 + 1} = (x^3 - 2x^2 + x + 1) : (2x^2 + 1) = 0,5x - 1 + \dfrac{0,5x + 2}{2x^2 + 1}$

   für $x \to \pm\infty$ gilt $\dfrac{0,5x + 2}{2x^2 + 1} \to 0$ und damit $f(x) \to 0,5x - 1$

   $y = 0,5x - 1$ ist damit Asymptote von G_f für $x \to \pm\infty$.

5. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{2x + 1} = (x^2 + x + 1) : (2x + 1) = 0,5x + 0,25 + \dfrac{0,75}{2x + 1}$

   für $x \to \pm\infty$ gilt $\dfrac{0,75}{2x + 1} \to 0$ und damit $f(x) \to 0,5x + 0,25$

   $y = 0,5x + 0,25$ ist damit Asymptote von G_f für $x \to \pm\infty$.