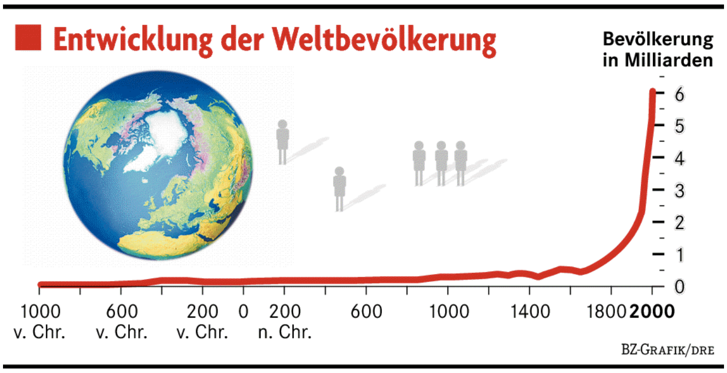
Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Exponentialfunktionen

Graphische Lösung von Exponentialgleichungen

Löse die folgenden Gleichungen graphisch! (Genauigkeit eine Dezimalstelle)

1. $2+2^x=3^x$
2. $2+2^{-x}=3^{x-1}$
3. $2^{x-2}=3^x-4$
4. $2+2^{-x}-3^x=0$
5. $2^x-2=3+3^{-x}$



Anwendungsaufgaben zu Exponentialfunktionen

6. Herr Meier legt einen Geldbetrag von 1000 € zu einem jährlichen Zinssatz von 2,5% an.
   Am Ende eines Jahres werden die Zinsen jeweils dem Kapital zugeschlagen.
   Nach wie vielen Jahren überschreitet Meiers Geldbetrag

   a) 1100 € b) 1500 € c) 2000 € ?

7. Die Bevölkerung Indiens überschritt im Jahr 1974 die Zahl 600 Millionen und im Jahr 1987 die Zahl von 800 Millionen.
   Gehen Sie im Folgenden von einem exponentiellen Wachstum der Bevölkerung Indiens aus.

   a) Bestimmen Sie eine Funktion N(t), die die Bevölkerungszahl Indiens t Jahre nach 1974 angibt!
   b) Welche jährliche Wachstumsrate ergibt sich aus der Funktion N(t)?
      In welcher Zeitspanne verdoppelt sich also die Bevölkerungszahl Indiens?
   c) Geben Sie eine Funktion B(j) an, die die Bevölkerungszahl Indiens im Jahr j (z.B. im Jahr j = 2014) angibt.
   d) Im Jahr 2013 betrug die Bevölkerungszahl Indiens geschätzte 1,24 Milliarden.
      Vergleichen Sie mit dem durch die Funktion B(j) berechneten Wert.

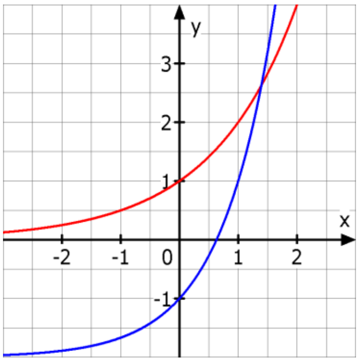
8. Weltbevölkerung
   Um das Jahr 1800 betrug die Weltbevölkerung rund 1 Milliarde Menschen; um 1930 waren es 2 Milliarden; 1960 dann 3 Milliarden und im Jahr 1975 mehr als 4 Milliarden.
   (Quelle: spiegel.de 24. Mai 1999)

   a) Verwenden Sie die angegebenen Bevölkerungszahlen von 1930 und 1960, um eine Exponentialfunktion N(t) für die Weltbevölkerung aufzustellen.
   b) Prüfen Sie nun, wie genau die Weltbevölkerung in den Jahren 1800 und 1975 durch N(t) angegeben wird.
   c) Im Jahr 2013 lebten nach Angaben des DSW-Datenreport 2013 der Deutschen Stiftung 7138 Millionen Menschen auf der Erde. Vergleichen Sie mit dem durch N(t) ermittelten Wert.

Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Exponentialfunktionen * Lösungen

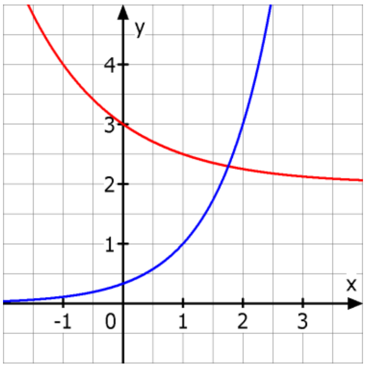
1. $2+2^{x}=3^{x} \Leftrightarrow$

   $2^{x}=3^{x}-2 \qquad x=1,394...$



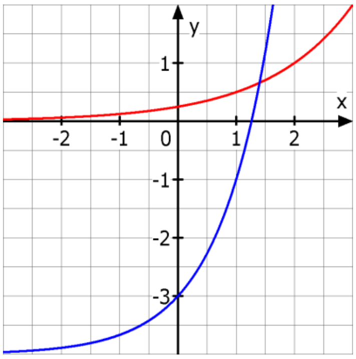
2. $2+2^{-x}=3^{x-1}$

   $x=1,756...$



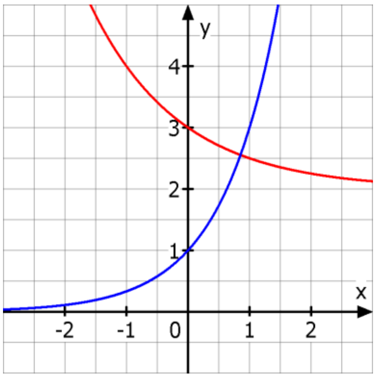
3. $2^{x-2}=3^{x}-4$

   $x=1,400...$



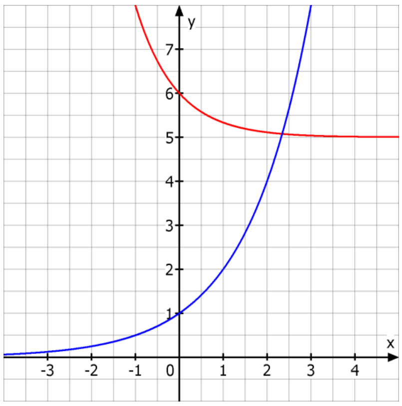
4. $2+2^{-x}-3^{x}=0$

   $2+2^{-x}=3^{x} \Leftrightarrow x=0,853...$



5. $2^{x}-2=3+3^{-x}$

   $2^{x}=5+3^{-x} \Leftrightarrow x=2,34...$



6. $K(t)=1000€\cdot 1,025^{\frac{t}{1a}}$

   a) $1100€=1000€\cdot 1,025^{\frac{t}{1a}} \Leftrightarrow 1,1=1,025^{\frac{t}{1a}} \Leftrightarrow \lg 1,1=\frac{t}{1a}\cdot \lg 1,025 \Leftrightarrow t=\frac{1a\cdot \lg 1,1}{\lg 1,025}\approx 3,86\,a$

   b) $1500€=1000€\cdot 1,025^{\frac{t}{1a}} \Leftrightarrow 1,5=1,025^{\frac{t}{1a}} \Leftrightarrow \lg 1,5=\frac{t}{1a}\cdot \lg 1,025 \Leftrightarrow t=\frac{1a\cdot \lg 1,5}{\lg 1,025}\approx 16,4\,a$

   c) $2000€=1000€\cdot 1,025^{\frac{t}{1a}} \Leftrightarrow 2=1,025^{\frac{t}{1a}} \Leftrightarrow \lg 2=\frac{t}{1a}\cdot \lg 1,025 \Leftrightarrow t=\frac{1a\cdot \lg 2}{\lg 1,025}\approx 28,1\,a$

   Nach 4 Jahren werden 1100€, nach 17 Jahren 1500€ und nach 29 Jahren 2000€ überschritten.

7. a) $N(t) = 600\cdot 10^6 \cdot 2^{\frac{t}{T}}$ und $800\cdot 10^6 = 600\cdot 10^6 \cdot 2^{\frac{(1987-1974)a}{T}} \Rightarrow \frac{8}{6} = 2^{\frac{13a}{T}} \Rightarrow$

$$\lg\frac{8}{6} = \lg 2^{\frac{13a}{T}} \Rightarrow \lg\frac{8}{6} = \frac{13a}{T}\cdot \lg 2 \Rightarrow T = \frac{13a\cdot \lg 2}{\lg(8/6)} \approx 31{,}322\,a \quad \text{also}$$

$$N(t) = 600\cdot 10^6 \cdot 2^{\frac{t}{31{,}322a}}$$

b) Die Bevölkerungszahl verdoppelt sich nach der Funktion $N(t)$ in etwa 31,3 a.

$$N(1a) = 600\cdot 10^6 \cdot 2^{\frac{1a}{31{,}322a}} \approx 600\cdot 10^6 \cdot 1{,}0224 \Rightarrow$$

Die jährliche Wachstumsrate beträgt etwa 2,24%.

c) $B(j) = 600\cdot 10^6 \cdot 2^{\frac{(j-1974)a}{31{,}322a}}$

d) $B(2013) = 600\cdot 10^6 \cdot 2^{\frac{(2013-1974)a}{31{,}322a}} = 600\cdot 10^6 \cdot 2{,}370... \approx 1{,}42\cdot 10^9$

Das reale Wachstum hat also etwas abgenommen.

8. $t = 0$ entspricht dem Jahr 1930

a) $N(t) = 2{,}0\cdot 10^9 \cdot 2^{\frac{t}{T}}$ und $3{,}0\cdot 10^9 = 2{,}0\cdot 10^9 \cdot 2^{\frac{30a}{T}} \Rightarrow \frac{3}{2} = 2^{\frac{30a}{T}} \Rightarrow \lg 1{,}5 = \frac{30\,a}{T}\cdot \lg 2 \Rightarrow$

$$T = \frac{30\,a\cdot \lg 2}{\lg 1{,}5} \approx 51{,}29\,a \quad \text{also} \quad N(t) = 2{,}0\cdot 10^9 \cdot 2^{\frac{t}{51{,}29a}}$$

b) $1800 \mathrel{\hat{=}} t = -130\,a;$ also $N(-130\,a) = 2{,}0\cdot 10^9 \cdot 2^{\frac{-130a}{51{,}29a}} \approx 0{,}35\cdot 10^9$

$1975 \mathrel{\hat{=}} t = 15\,a;$ also $N(15\,a) = 2{,}0\cdot 10^9 \cdot 2^{\frac{15a}{51{,}29a}} \approx 2{,}5\cdot 10^9$

Vor 1930 war das reale Wachstum geringer, nach 1960 war es dagegen stärker als durch N(t) angegeben.

c) $2013 \mathrel{\hat{=}} t = 83\,a;$ also $N(83\,a) = 2{,}0\cdot 10^9 \cdot 2^{\frac{83a}{51{,}29a}} = 6{,}14\cdot 10^9$

Die Weltbevölkerung wächst also weiterhin schneller als durch N(t) angegeben.