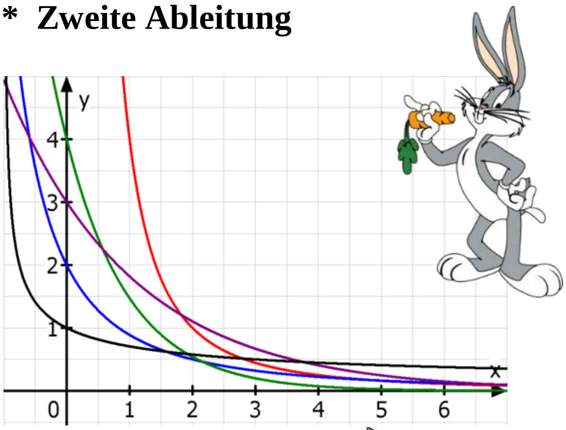
Q12 * Mathematik * Uneigentliche Integrale * Zweite Ableitung

1. Das Bild zeigt die Graphen der Funktionen

   $f_1(x) = \dfrac{8}{(x+2)^2}$; $f_2(x) = 4 \cdot e^{-x}$

   $f_3(x) = 3 \cdot e^{-0{,}5\,x}$; $f_4(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

   $f_5(x) = \dfrac{4}{x^2}$

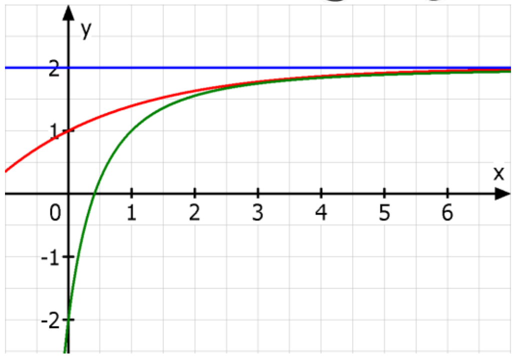


   Ordnen Sie die Graphen den angegebenen Funktionen korrekt zu und untersuchen Sie,

   ob die uneigentlichen Integrale $\lim\limits_{b \to \infty} \int_1^b f_i(x)\,dx$ existieren!

2. Das Bild zeigt die Graphen der beiden Funktionen $f(x) = 2 - \dfrac{4}{(x+1)^2}$ und

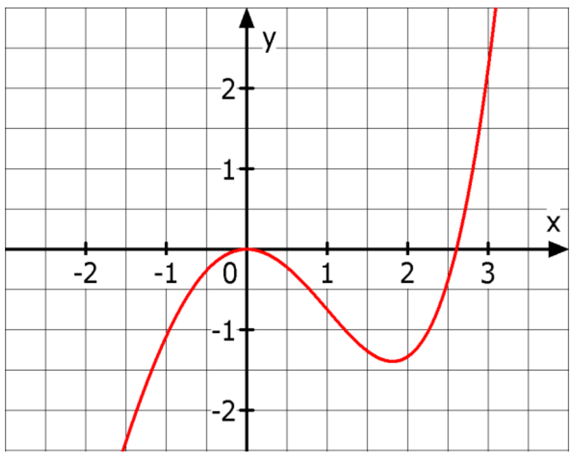
   $g(x) = 2 - e^{-0{,}5\,x}$.



   a) Ordnen Sie die Funktionen den Graphen korrekt zu und zeigen Sie, dass die waagrechte Gerade $y = 2$ jeweils eine Asymptote für $x \to \infty$ ist.
   b) Prüfen Sie, ob die von der y-Achse, der Asymptote $y = 2$ und dem Graphen begrenzte Fläche jeweils endlichen Inhalt besitzt. Bestimmen Sie diesen Flächeninhalt gegebenenfalls.

3. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion

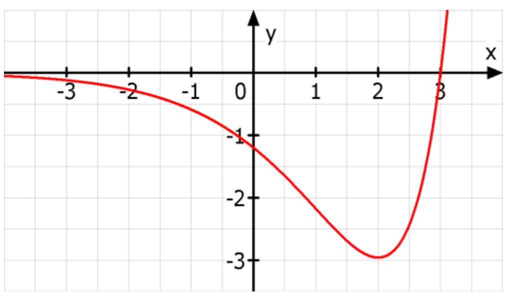
   $f(x) = \dfrac{1}{12} \cdot (x^4 + 2x^3 - 12x^2)$.



   a) Bestimmen Sie anhand des Bildes möglichst genau die Intervalle, in denen die Funktion f streng monoton steigt und rechts- bzw. links-gekrümmt ist.
   b) Bei welchem Punkt des Graphen ändert sich das Krümmungsverhalten? Man diesen Punkt auch Wendepunkt des Graphen.
   c) Überprüfen Sie Ihre Antworten zu a) und b) durch entsprechende Rechnung!

4. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion

   $f(x) = 0{,}4 \cdot (x-3) \cdot e^x$.



   a) Kennzeichnen Sie möglichst genau die Intervalle, in denen der Graph der Funktion f rechts- bzw. links-gekrümmt ist.
      Bei ungefähr welchem Punkt des Graphen ändert sich das Krümmungsverhalten von f ?
   b) Bestätigen Sie Ihre Angaben in a) durch geeignete Rechnung!

Q12 * Mathematik * Uneigentliche Integrale * Zweite Ableitung * Lösungen

1. Zuordnung: f_1 blauer Graph, f_2 grüner Graph, f_3 violetter Graph, f_4 schwarzer Graph, f_5 roter Graph

$$A_1 = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{8}{(x+2)^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-8}{x+2}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{-8}{b+2} - \frac{-8}{1+2} = \text{"}\frac{-8}{\infty}\text{"} + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$

$$A_2 = \lim_{b\to\infty} \int_1^b 4\cdot e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-4\cdot e^{-x}\right]_1^b = \text{"}-4\cdot e^{-\infty}\text{"} + 4\cdot e^{-1} = 0 + \frac{4}{e} \approx 1{,}47$$

$$A_3 = \lim_{b\to\infty} \int_1^b 3\cdot e^{-0{,}5x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-6\cdot e^{-0{,}5x}\right]_1^b = \text{"}-6\cdot e^{-\infty}\text{"} + 6\cdot e^{-0{,}5} = 0 + \frac{6}{\sqrt{e}} \approx 3{,}64 \quad f_2(x) = 4\cdot e^{-x}$$

$$A_4 = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[2\cdot\sqrt{x+1}\right]_1^b = \text{"}2\cdot\sqrt{\infty}\text{"} - 2\cdot\sqrt{2} = \infty$$

A_4 existiert also nicht!

$$A_1 = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{4}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-4}{x}\right]_1^b = = \text{"}\frac{-4}{\infty}\text{"} + \frac{4}{1} = 4$$

2. a) G_f grün und G_g rot

$$\lim_{x\to\infty}(2 - f(x)) = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{(x+1)^2} = \text{"}\frac{4}{\infty}\text{"} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty}(2 - g(x)) = \lim_{x\to\infty} e^{-0{,}5x} = \text{"}e^{-\infty}\text{"} = 0$$

b) $$A_f = \lim_{b\to\infty}\int_0^b (2-f(x))\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{4}{(x+1)^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-4}{x+1}\right]_0^b = \text{"}\frac{-4}{\infty}\text{"} - \frac{-4}{1} = 4$$

$$A_g = \lim_{b\to\infty}\int_0^b (2-g(x))\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-0{,}5x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-2e^{-0{,}5x}\right]_0^b = \text{"}-2\cdot e^{-\infty}\text{"} - (-2\cdot 1) = 2$$

3. a) Beachte: Wegen $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ muss G_f für $x < -1$ noch einen Tiefpunkt besitzen!

f steigt streng monoton in [?; 0] und ungefähr in [1,8 ; ∞[
Rechtskrümmung ungefähr in] ? ; 1 [und Linkskrümmung in] 1 ; ∞ [

b) Im Punkt $P(1 / -\frac{2}{3})$ scheint sich das Krümmungsverhalten zu ändern.

c) $$f'(x) = \frac{1}{12}\cdot(4x^3 + 6x^2 - 24x) = \frac{x}{6}\cdot(2x^2 + 3x - 12) \quad \text{und}$$

$$f''(x) = \frac{1}{12}\cdot(12x^2 + 12x - 24) = x^2 + x - 2$$

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_{2/3} = \frac{1}{2\cdot 2}\cdot(-3 \pm \sqrt{9 + 4\cdot 2\cdot 12}) = \frac{-3 \pm \sqrt{105}}{4}$$

$x_2 \approx -3{,}31$ und $x_3 \approx 1{,}81$ (x_2 ist im Bild nicht erkennbar!)

f ist streng monoton steigend in $[x_2;0]$ und in $[x_3;\infty[$

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{4/5} = \frac{1}{2}\cdot(-1 \pm \sqrt{1 + 4\cdot 2}) \;\Leftrightarrow\; x_4 = -2 \;\text{ und }\; x_5 = 1$$

Rechtskrümmung in [-2;1] , Linkskrümmung in]-∞; -2] und [1;∞[

4. a) Rechtskrümmung in]-∞;1[, Linkskrümmung in]1;∞[; Wendepunkt ≈ (1 / -2,2)

b) $$f'(x) = 0{,}4\cdot\left(1\cdot e^x + (x-3)\cdot e^x\right) = 0{,}4\cdot(x-2)\cdot e^x \quad \text{und}$$

$$f''(x) = 0{,}4\cdot\left(1 + (x-2)\right)\cdot e^x = 0{,}4\cdot(x-1)\cdot e^x \quad \text{also} \quad f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 1$$

$f''(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x < 1$ also Rechtskrümmung in]-∞;1[und Linkskrümmung in]1;∞[

Wendepunkt (1 / f(1)) ≈ (1 / -2,175)