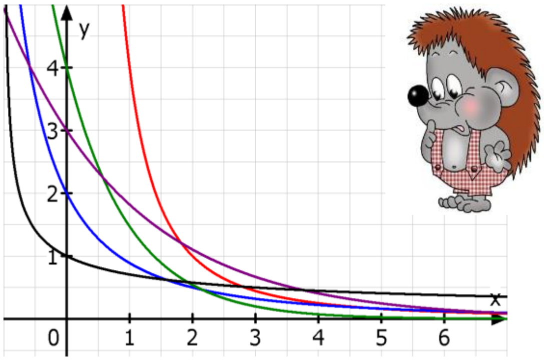
# Q12 * Mathematik * Uneigentliche Integrale

1. Das Bild zeigt die Graphen der Funktionen




$$f_1(x) = \frac{8}{(x+2)^2} \quad ; \quad f_2(x) = 4 \cdot e^{-x}$$

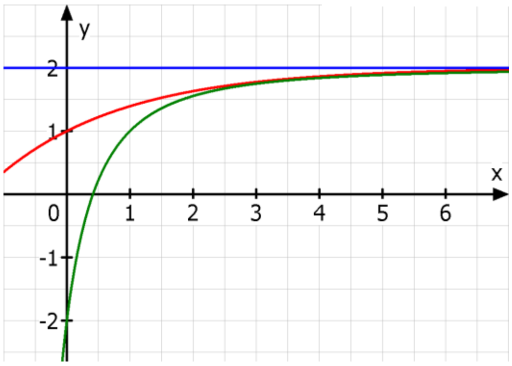
$$f_3(x) = 3 \cdot e^{-0{,}5\,x} \quad ; \quad f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$f_5(x) = \frac{4}{x^2}$$

Ordnen Sie die Graphen den angegebenen Funktionen korrekt zu und untersuchen Sie,

ob die uneigentlichen Integrale $\lim\limits_{b \to \infty} \int_1^b f_i(x)\,dx$ existieren!

2. Das Bild zeigt die Graphen der beiden



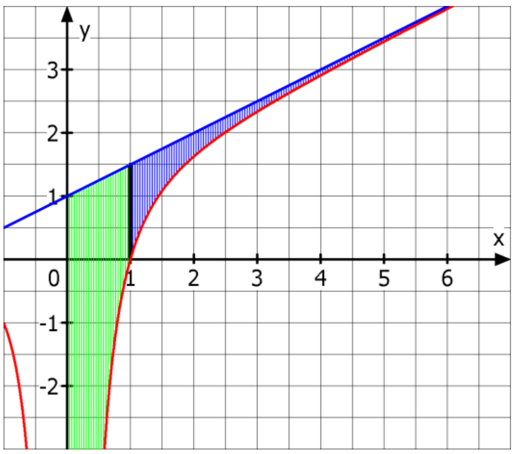

Funktionen $f(x) = 2 - \dfrac{4}{(x+1)^2}$ und

$g(x) = 2 - e^{-0{,}5\,x}$.

a) Ordnen Sie die Funktionen den Graphen korrekt zu und zeigen Sie, dass die waagrechte Gerade $y = 2$ jeweils eine Asymptote für $x \to \infty$ ist.

b) Prüfen Sie, ob die von der y-Achse, der Asymptote $y = 2$ und dem Graphen begrenzte Fläche jeweils endlichen Inhalt besitzt. Bestimmen Sie diesen Flächeninhalt gegebenenfalls.

3. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit




$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{2x^2} \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

a) Bestimmen Sie die Gleichung der schräg liegenden Asymptote für $x \to +\infty$.

b) Prüfen Sie, ob die Inhalte der blau bzw. grün schraffierten Fläche zwischen $G_f$ und dieser schräg liegenden Asymptote bzw. zwischen $G_f$, der Asymptote und der y-Achse endlich sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Werte dieser Flächeninhalte.

## Q12 * Mathematik * Uneigentliche Integrale * Lösungen

1. Zuordnung: $f_1$ blauer Graph, $f_2$ grüner Graph, $f_3$ violetter Graph, $f_4$ schwarzer Graph, $f_5$ roter Graph

$$A_1 = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{8}{(x+2)^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-8}{x+2}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{-8}{b+2} - \frac{-8}{1+2} = \text{"}\frac{-8}{\infty}\text{"} + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$

$$A_2 = \lim_{b\to\infty} \int_1^b 4\cdot e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-4\cdot e^{-x}\right]_1^b = \text{"}-4\cdot e^{-\infty}\text{"} + 4\cdot e^{-1} = 0 + \frac{4}{e} \approx 1{,}47$$

$$A_3 = \lim_{b\to\infty} \int_1^b 3\cdot e^{-0{,}5x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-6\cdot e^{-0{,}5x}\right]_1^b = \text{"}-6\cdot e^{-\infty}\text{"} + 6\cdot e^{-0{,}5} = 0 + \frac{6}{\sqrt{e}} \approx 3{,}64$$

$$A_4 = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[2\cdot\sqrt{x+1}\right]_1^b = \text{"}2\cdot\sqrt{\infty}\text{"} - 2\cdot\sqrt{2} = \infty$$ $A_4$ existiert also nicht!

$$A_1 = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{4}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-4}{x}\right]_1^b = = \text{"}\frac{-4}{\infty}\text{"} + \frac{4}{1} = 4$$

2. a) $G_f$ grün und $G_g$ rot

$$\lim_{x\to\infty}(2 - f(x)) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{(x+1)^2} = \text{"}\frac{4}{\infty}\text{"} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty}(2 - g(x)) = \lim_{x\to\infty} e^{-0{,}5x} = \text{"}e^{-\infty}\text{"} = 0$$

b) $$A_f = \lim_{b\to\infty} \int_0^b (2 - f(x))\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{4}{(x+1)^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-4}{x+1}\right]_0^b = \text{"}\frac{-4}{\infty}\text{"} - \frac{-4}{1} = 4$$

$$A_g = \lim_{b\to\infty} \int_0^b (2 - g(x))\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-0{,}5x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-2e^{-0{,}5x}\right]_0^b = \text{"}-2\cdot e^{-\infty}\text{"} - (-2\cdot 1) = 2$$

3. a) $$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{2x^2} = 0{,}5x + 1 - \frac{3}{2x^2} \quad \text{(Polynomdivision)}$$

Gleichung der schräg liegenden Asymptote: $a(x) = 0{,}5x + 1$

$G_f$ schmiegt sich für $x \to +\infty$ von unten an die Asymptote an, denn $-\frac{3}{2x^2} < 0$.

b) $$A_1 = \lim_{b\to\infty} \int_1^b a(x) - f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{3}{2x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{3}{2x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{3}{2b} + \frac{3}{2}\right) =$$

$$\text{"}\frac{3}{2} - \frac{3}{\infty}\text{"} = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$ (Die blaue Fläche hat also den endlichen Inhalt $\frac{3}{2}$.)

$$A_2 = \lim_{b\to 0^+} \int_b^1 a(x) - f(x)\,dx = \lim_{b\to 0^+} \int_b^1 \frac{3}{2x^2}\,dx = \lim_{b\to 0^+}\left[-\frac{3}{2x}\right]_b^1 = \lim_{b\to 0^+}\left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2b}\right) =$$

$$\text{"}-\frac{3}{2} + \frac{3}{0^+}\text{"} = +\infty$$ (Die grüne Fläche hat also unendlichen Inhalt.)