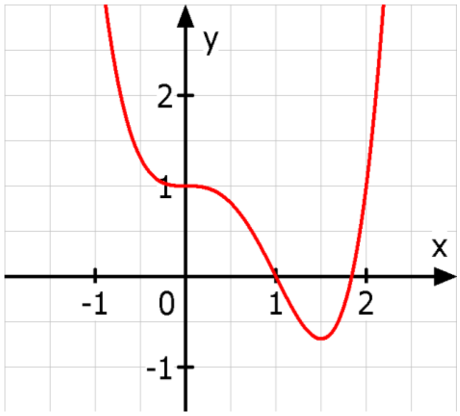
Q12 * Mathematik * Wendepunkte und Art der Extrema

1. Das Bild zeigt den Graphen der Funktionen

   $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.

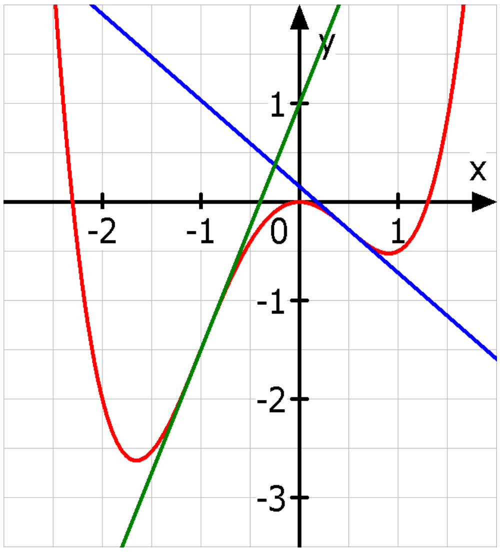
   a) In welchen Intervallen ist der Graph von f linksgekrümmt? Bestätigen Sie das durch geeignete Rechnung!
   b) Bestimmen Sie alle Hoch-, Tief- und Wendepunkte rechnerisch!
   c) Die waagrechte Wendetangente schließt mit dem Graphen von f eine Fläche mit dem Inhalt A ein. Berechnen Sie A.



2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion

   $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x^4 + x^3 - 3x^2\right)$

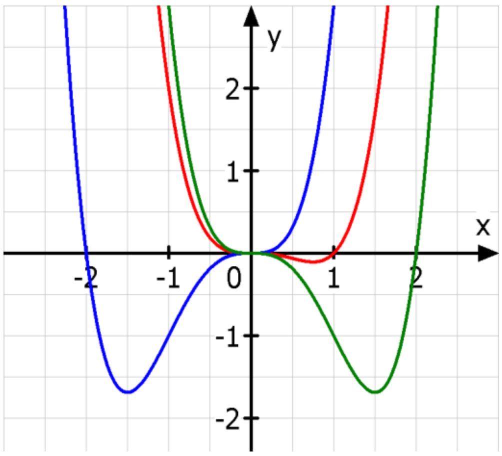
   a) Bestimmen Sie alle Nullstellen, und berechnen Sie alle Hoch-, Tief- und Wendepunkte.
   b) Bestimmen Sie die Gleichung der beiden (eingezeichneten) Wendetangenten.
   c) Der Graph von f und die beiden Wendetangenten schließen eine Fläche mit dem Inhalt A ein. Berechnen Sie A.



3. Das Bild zeigt drei Graphen der Funktionenschar

   $f_k(x) = x^4 + k \cdot x^3$ mit $k \in R$.

   a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f_k .
   b) Bestimmen Sie alle Hoch-, Tief- und Wendepunkte in Abhängigkeit von k.
   c) Geben Sie zu den drei abgebildeten Graphen die zugehörigen Werte für k an.
   d) Bestimmen Sie die Gleichungen der Wendetangenten in Abhängigkeit von k.
   e) Zeigen Sie, dass die Graphen von f_k und f_{-k} zueinander achsensymmetrisch liegen.
   f) Peter behauptet: Es gibt ein $k \in R$, so dass sich die Wendetangenten der Graphen von f_k und f_{-k} rechtwinklig schneiden. Prüfen Sie Peters Behauptung.



Q12 * Mathematik * Wendepunkte und Art der Extrema

1. a) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1 \;\Rightarrow\; f'(x) = 4x^3 - 6x^2$ und $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$

$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0\;;\; x_2 = 1$ und $f''(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x \in\,]\,0\,;1[$

G_f ist linkgekrümmt $\Leftrightarrow\; f''(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \mathbb{R}\setminus[\,0\,;1\,]$

b) waagrechte Tangenten: $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x^3 - 6x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x^2(2x-3) = 0$

$\Leftrightarrow\; x_1 = 0\;;\; x_2 = 1{,}5$ und $y_1 = 1;\; y_2 = -11/16$

$f''(0) = 0$ also keine Aussage über Art des Extremums möglich.

$f'(x) = 2x^2(2x-3)$ ändert an der Stelle $x_1 = 0$ das Vorzeichen nicht, d.h. es liegt an der Stelle $x_1 = 0$ ein Terrassenpunkt TP(0/1) vor.

Bei $x_2 = 1{,}5$ ändert $f'(x)$ das Vorzeichen (von - auf +), d.h. es liegt ein Tiefpunkt vor.
Dies bestätigt auch die Ableitung von f , denn es gilt $f''(1{,}5) = 9 > 0$.-

c) Die beiden Wendepunkte sind (0/1) und (1/0); WP(0/1) ist Terrassenpunkt.
Die waagrechte Wendetangente lautet also $y = 1$.
Schnittpunkt von waagrechter Wendetangente und Graph von f : $f(x) = 1$

$\Leftrightarrow\; x^4 - 2x^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3(x-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0$ oder $x_3 = 2$

$$A = \int_0^2 1 - f(x)\,dx = \int_0^2 -x^4 + 2x^3\,dx = \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2}\right]_0^2 = -\frac{32}{5} + 8 = 1{,}6$$

2. a) $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2}{2}\cdot\left(x^2 + x - 3\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 0$ oder $x^2 + x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow$

$x_{1/2} = 0\;;\; x_{3/4} = \frac{1}{2}\cdot\left(-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-3)}\right) = \frac{1}{2}\cdot(-1 \pm \sqrt{13})$; also $x_3 \approx -2{,}3$ und $x_4 \approx 1{,}3$

$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot(4x^3 + 3x^2 - 6x)$ und $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{2}\cdot(4x^2 + 3x - 6) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0$ oder

$4x^2 + 3x - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0$ oder $x_{5/6} = \frac{1}{8}\cdot\left(-3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 4\cdot(-6)}\right) = \frac{1}{8}(-3 \pm \sqrt{105})$

$x_5 \approx 0{,}91$ und $x_6 \approx -1{,}66$

$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot(12x^2 + 6x - 6) = 3\cdot(2x^2 + x - 1)$, also

$f''(x_5) \approx 4{,}7 > 0$; also $TIP_1\,(x_5 / y_5) \approx TIP_1\,(0{,}91 / -0{,}52)$ und

$f''(x_6) \approx +8{,}55 > 0$; also $TIP_2\,(x_6 / y_6) \approx TIP_2\,(-1{,}66 / -2{,}62)$

$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot(12x^2 + 6x - 6) = 3\cdot(2x^2 + x - 1)$ und $f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow$

$x_{7/8} = \frac{1}{2\cdot 2}\left(-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 2\cdot(-1)}\right) = \frac{1}{4}\cdot(-1 \pm 3)$, d.h. $x_7 = 0{,}5$ und $x_8 = -1$

Da $f''(x)$ an den Stellen x_7 und x_8 das Vorzeichen wechselt, liegen bei x_7 und x_8 Wendestellen vor. $WP_1\left(\frac{1}{2} / -\frac{9}{32}\right)$ und $WP_2(-1/ -1{,}5)$

b) $f'(0{,}5) = -\frac{7}{8} = m_1$; blaue Wendetangente: $y = -\frac{7}{8}x + t_1$ WP_1 eingesetzt liefert

$-\frac{9}{32} = -\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{2} + t_1 \;\Rightarrow\; t_1 = \frac{5}{32}$ also $y = -\frac{7}{8}x + \frac{5}{32}$ für die blaue Wendetangente;

$f'(-1) = 2{,}5 = m_2$; grüne Wendetangente: $y = 2{,}5x + t_2$ WP_2 eingesetzt liefert

$-1{,}5 = 2{,}5\cdot(-1) + t_2 \Rightarrow t_2 = 1$ also $y = 2{,}5x + 1$ für die grüne Wendetangente;

c) Schnittpunkt S der Wendetangenten:

$$-\frac{7}{8}x + \frac{5}{32} = \frac{5}{2}x + 1 \Rightarrow \frac{27}{8}x = -\frac{27}{32} \Rightarrow x_S = -\frac{1}{4} \quad (\text{ und } y_S = \frac{3}{8})$$

$$A = \int_{-1}^{x_S} 2{,}5x + 1 - \frac{1}{2}\cdot(x^4 + x^3 - 3x^2)\,dx + \int_{x_S}^{0,5} -\frac{7}{8}x + \frac{5}{32} - \frac{1}{2}\cdot(x^4 + x^3 - 3x^2)\,dx =$$

$$\left[\frac{5x^2}{4} + x - \frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{2}\right]_{-1}^{-\frac{1}{4}} + \left[-\frac{7x^2}{16} + \frac{5x}{32} - \frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{2}\right]_{-\frac{1}{4}}^{+\frac{1}{2}} =$$

$$-\frac{461}{2560} - (-\frac{11}{40}) + \frac{13}{640} - (-\frac{191}{2560}) = \frac{243}{2560} + \frac{243}{2560} = \frac{243}{1280} \approx 0{,}19$$

3. a) $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow x^3(x+k) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ (dreifache NSt.) ; $x_2 = -k$

b) $f_k'(x) = 4x^3 + 3k\cdot x^2 = x^2\cdot(4x+3k)$; $f_k''(x) = 12x^2 + 6k\cdot x = 6x\cdot(2x+k)$

Extrema: $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2\cdot(4x+3k) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 ; x_3 = -\frac{3k}{4}$ und $y_1 = 0 ; y_3 = -\frac{27}{256}k^4$

Beachte: Bei x_1 ändert $f_k'(x)$ das Vorzeichen nicht! Dort liegt damit kein Hoch- bzw. Tiefpunkt (sondern ein Terrassenpunkt).

$f_k''(x_3) = f_k''(-\frac{3k}{4}) = 12\cdot\frac{9k^2}{16} - \frac{6k\cdot 3k}{4} = \frac{9}{4}k^2 > 0$ also Tiefpunkt $(-\frac{3k}{4} / -\frac{27}{256}k^4)$

Wendepunkte: $f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x\cdot(2x+k) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_4 = -\frac{k}{2}$ und $y_4 = -\frac{k^4}{16}$

Da $f''(x)$ bei x_1 und auch bei x_4 das Vorzeichen wechselt, hat der Graph die Wendepunkte $(0/0)$ und $(-\frac{k}{2}/-\frac{k^4}{16})$

c) Blauer Graph: k = 2 ; grüner Graph: k = -2 ; roter Graph: k = -1

d) Die Wendetangente durch (0/0) hat die Gleichung y = 0 (das ist die x-Achse)

Wendetangente durch $(-\frac{k}{2}/-\frac{k^4}{16})$: $m = f_k'(-\frac{k}{2}) = 4(-\frac{k^3}{8}) + 3k\cdot\frac{k^2}{4} = \frac{k^3}{4}$

Wendetangente $y = \frac{k^3}{4}x + t$; $(-\frac{k}{2}/-\frac{k^4}{16})$ eingesetzt liefert

$-\frac{k^4}{16} = \frac{k^3}{4}\cdot(-\frac{k}{2}) + t \Rightarrow t = \frac{k^4}{16}$; also Wendetangente $y = \frac{k^3}{4}x + \frac{k^4}{16}$

e) $f_{-k}(x) = x^4 - k\cdot x^3$ und $f_k(-x) = (-x)^4 + k\cdot(-x)^3 = x^4 - k\cdot x^3 = f_{-k}(x)$

Wegen $f_k(-x) = f_{-k}(x)$ liegen die Graphen von f_k und f_{-k} zueinander achsensymmetrisch.

f) Da rechtwinkliges Schneiden mit der x-Achse nicht möglich ist, kann Peter nur die beiden Wendetangenten $y = \frac{k^3}{4}x + \frac{k^4}{16}$ (für k) und $y = \frac{(-k)^3}{4}x + \frac{(-k)^4}{16} = -\frac{k^3}{4}x + \frac{k^4}{16}$ (für –k) meinen. Sollen diese beiden Wendetangenten zueinander senkrecht stehen, dann muss gelten:

$m_k\cdot m_{-k} = -1$ also $\frac{k^3}{4}\cdot(-\frac{k^3}{4}) = -1 \Leftrightarrow k^6 = 16 \Leftrightarrow k_{1/2} = \pm\sqrt[6]{16} = \pm\sqrt[3]{4} \approx \pm 1{,}59$