

Q12 * Mathematik * Flächenberechnungen



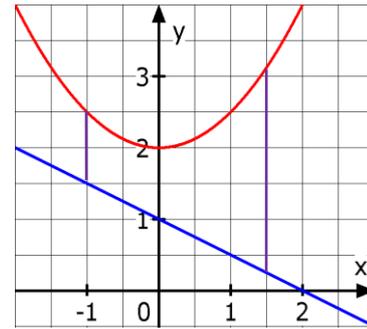
1. Das Bild zeigt die Graphen der beiden Funktionen

$$f(x) = 0,5x^2 + 2 \quad \text{und} \quad g(x) = -0,5x + 1.$$

Man erkennt: $f(x) > g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie den Inhalt A der Fläche zwischen den beiden Graphen und den Grenzen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1,5$. Schraffieren Sie im Bild diese Fläche!

Begründen Sie, dass gilt $A = \int_{-1}^{1,5} f(x) - g(x) dx$.



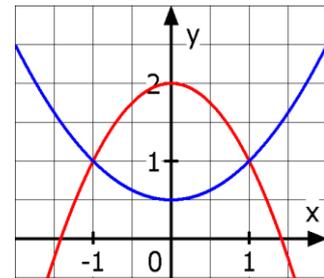
2. Die Graphen der Funktionen

$$f(x) = 2 - x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = 0,5x^2 + 0,5$$

schließen eine Fläche mit dem Inhalt A ein.

Schraffieren Sie diese Fläche und berechnen Sie A .

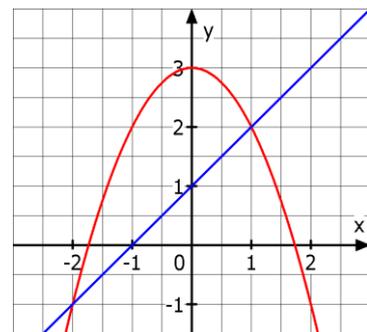
Begründen Sie, dass gilt $A = \int_{-1}^1 f(x) - g(x) dx$.



3. Die abgebildete Parabel und Gerade schließen eine Fläche mit dem Inhalt A ein. Schraffieren Sie diese Fläche!

Bestimmen Sie die Funktionsterme von f und g und die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 der Graphen.

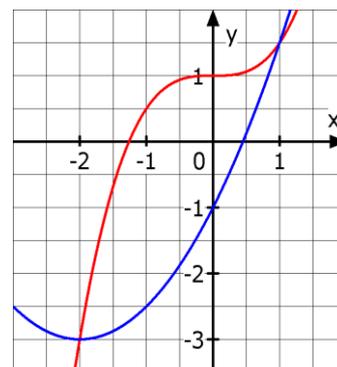
Geben Sie A als bestimmtes Integral an und berechnen Sie dann A .



4. Die Parabel mit dem Scheitel $S(-2/-3)$ und der Graph der Funktion f mit $f(x) = 1 + 0,5 \cdot x^3$ schließen eine Fläche mit dem Inhalt A ein.

Bestimmen Sie den zur Parabel gehörenden Funktionsterm und alle Schnittpunkte.

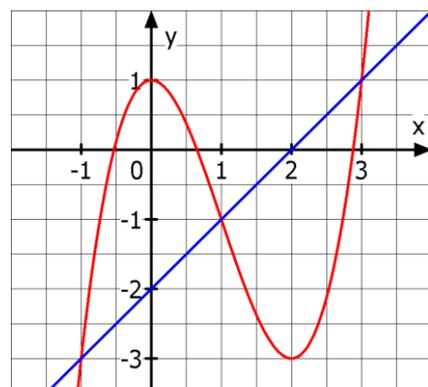
Wie kann man A als bestimmtes Integral schreiben? Berechnen Sie nun A .



5. Die beiden abgebildeten Graphen schneiden sich in drei Punkten, die jeweils ganzzahlige Koordinaten besitzen. Zum „roten Graph“ gehört eine Funktion dritten Grades mit dem Hochpunkt HOP(0/1) und dem Tiefpunkt TIP(2/-3).

Bestimmen Sie die jeweiligen Funktionsterme und die Schnittpunkte der Graphen.

Wie kann man den gesamten Inhalt A der von den beiden Graphen eingeschlossenen Fläche mit bestimmten Integralen angeben? Berechnen Sie nun A !



Q12 * Mathematik * Flächenberechnungen * Lösungen

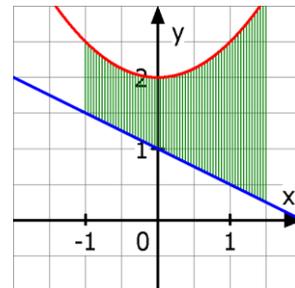


1. $A = \int_{-1}^{1,5} f(x) dx - \int_{-1}^{1,5} g(x) dx = \int_{-1}^{1,5} f(x) - g(x) dx$ gilt wegen der Linearität des Integrals.

$$A = \int_{-1}^{1,5} f(x) - g(x) dx = \int_{-1}^{1,5} 0,5x^2 + 2 - (-0,5x + 1) dx = \int_{-1}^{1,5} 0,5x^2 + 0,5x + 1 dx =$$

$$\int_{-1}^{1,5} 0,5x^2 + 0,5x + 1 dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} + x \right]_{-1}^{1,5} =$$

$$\frac{9}{16} + \frac{9}{16} + \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{21}{8} - \left(-\frac{11}{12} \right) = \frac{85}{24} \approx 3,54$$

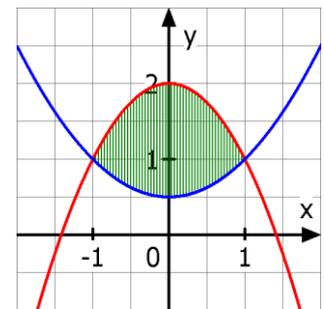


2. Schnittpunkte:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2 - x^2 = 0,5x^2 + 0,5 \Leftrightarrow 1,5x^2 = 1,5 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1$$

$$A = \int_{-1}^1 f(x) - g(x) dx = \int_{-1}^1 2 - x^2 - (0,5x^2 + 0,5) dx =$$

$$\int_{-1}^1 1,5 - 1,5x^2 dx = \left[1,5x - \frac{x^3}{2} \right]_{-1}^1 = 1,5 - 0,5 - (-1,5 + 0,5) = 2$$



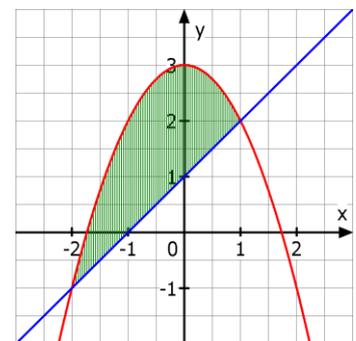
3. $f(x) = 3 - x^2$ und $g(x) = x + 1$; Schnittpunkte: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3 - x^2 = x + 1 \Leftrightarrow$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot (x+2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 ; x_2 = 1$$

$$A = \int_{-2}^1 f(x) - g(x) dx = \int_{-2}^1 3 - x^2 - (x + 1) dx =$$

$$\int_{-2}^1 -x^2 - x + 2 dx = \int_{-2}^1 -x^2 - x + 2 dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 =$$

$$-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 \right) = \frac{9}{2} = 4,5$$



4. $g(x) = 0,5 \cdot (x+2)^2 - 3 = 0,5x^2 + 2x - 1$

Schnittpunkte: $g(x) = f(x) \Leftrightarrow 0,5x^2 + 2x - 1 = 1 + 0,5x^3 \Leftrightarrow$

$0,5x^3 - 0,5x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

Ersichtliche Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$ also

$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-2) = 0$

Es gibt also noch einen dritten Schnittpunkt $S_3(2/5)$!

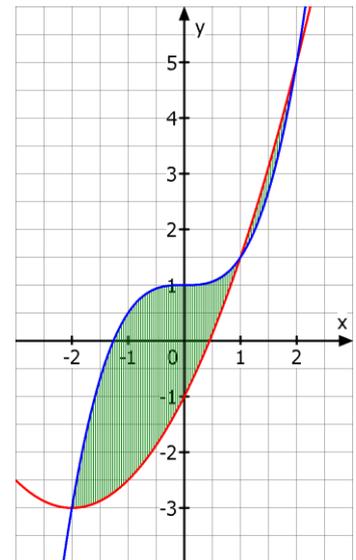
$A = \int_{-2}^1 g(x) - f(x) dx + \int_1^2 f(x) - g(x) dx =$

$\int_{-2}^1 1 + 0,5x^3 - 0,5x^2 - 2x + 1 dx + \int_1^2 0,5x^2 + 2x - 1 - 1 - 0,5x^3 dx =$

$\int_{-2}^1 0,5x^3 - 0,5x^2 - 2x + 2 dx + \int_1^2 -0,5x^3 + 0,5x^2 + 2x - 2 dx =$

$\left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} - x^2 + 2x \right]_{-2}^1 + \left[-\frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{6} + x^2 - 2x \right]_1^2 =$

$\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{6} - 1 + 2 \right) - \left(2 + \frac{8}{6} - 4 - 4 \right) + \left(-2 + \frac{8}{6} + 4 - 4 \right) - \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{6} + 1 - 2 \right) = \frac{45}{8} + \frac{7}{24} = \frac{71}{12} \approx 5,92$



5. Die Schnittpunkte lauten $(-1/-3)$, $(1/-1)$ und $(3/1)$.

Einsetzen der Punkte $(0/1)$, $(-1/-3)$, $(1/-1)$ und $(3/1)$ in $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ liefert

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1.$

Gerade: $g(x) = x - 2$

$A = \int_{-1}^1 f(x) - g(x) dx + \int_1^3 g(x) - f(x) dx =$

$\int_{-1}^1 x^3 - 3x^2 + 1 - x + 2 dx + \int_1^3 x^3 - 3x^2 + 1 - x + 2 dx =$

$\left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x \right]_1^3 =$

$\left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3 \right) - \left(\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} - 3 \right) + \left(-\frac{81}{4} + 27 + \frac{9}{2} - 9 \right) - \left(-\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} - 3 \right) = 4 + 4 = 8$

