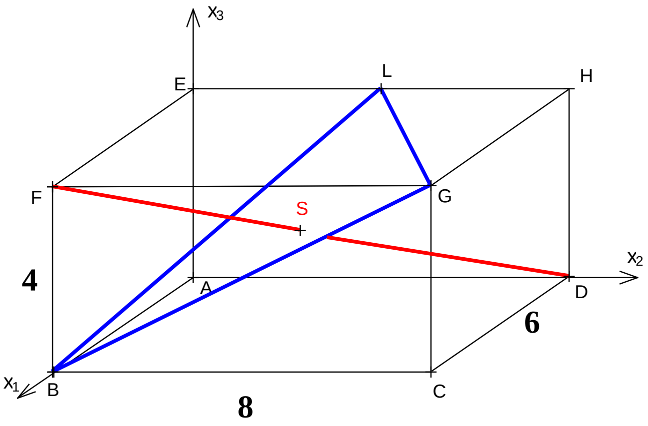
Q12 * Mathematik m6 * Extemporale am 18.03.2014

1. Im abgebildeten Koordinatensystem ist ein Quader mit den Kantenlängen 6, 8 und 4 gegeben.

   Es gilt: A(0/0/0), G(6/8/4)
   L ist der Mittelpunkt der Strecke [EH] und die Ebene E ist durch die drei Punkte B, G und L bestimmt.
   Die Gerade g ist durch die Punkte F und D festgelegt.



   a) Bestimmen Sie eine Normalenform der Ebene E.
   [Mögliches Ergebnis: $E: \; 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 12 = 0$]

   b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden g = FD mit der Ebene E.
   Unter welchem Winkel schneidet g die Ebene E?

   c) Gesucht ist der Mittelpunkt M einer Kugel mit folgenden Eigenschaften:
   M liegt auf der Geraden g = FD, der Kugelradius hat den Wert r = 3 und die Kugel berührt die Ebene E.
   Begründen Sie kurz, dass es zwei solche Mittelpunkte gibt und bestimmen Sie die Koordinaten eines dieser beiden Mittelpunkte.

2. Der Punkt P(5/0/2) soll an der Ebene E mit $E: \; 2x_1 + x_2 - x_3 + 4 = 0$ gespiegelt werden.
   Bestimmen Sie die Koordinaten des gespiegelten Punktes P^*.

Aufgabe	1a	b	c	2	Summe
Punkte	4	5	5	5	19

Gutes Gelingen! G.R.

Q12 * Mathematik m6 * Extemporale am 18.03.2014 * Lösung

1. a) $\overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix} 6-6 \\ 8-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BL} = \begin{pmatrix} 0-6 \\ 4-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$E: \ (\vec{X}-\vec{B})\circ \vec{n}_E = 0 \ \Leftrightarrow \ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - (6\cdot 2 - 0\cdot 3 + 0\cdot 6) = 0$

also $E: \ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 12 = 0$

b) $\overrightarrow{FD} = \begin{pmatrix} 0-6 \\ 8-0 \\ 0-4 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $g = FD: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt $g \cap E = \{S\}$:

$2\cdot(6-3r) - 3\cdot(0+4r) + 6\cdot(4-2r) - 12 = 0 \ \Leftrightarrow \ 24 - 30r = 0 \ \Leftrightarrow \ r = 0{,}8$

$\vec{S} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}8\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}6 \\ 3{,}2 \\ 2{,}4 \end{pmatrix}$ also $S(3{,}6 / 3{,}2 / 2{,}4)$ und für den Schnittwinkel φ gilt

$$\sin\varphi = \frac{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{9+16+4}\cdot\sqrt{4+9+36}} = \frac{|-6-12-12|}{\sqrt{29}\cdot 7} = \frac{30}{\sqrt{29}\cdot 7} \ \Rightarrow \ \varphi = 52{,}734...^\circ \approx 52{,}7^\circ$$

c) d(M ; Ebene E) = ± 3 , daher gibt es zwei Lösungen für M

$E_{HNF}: \ \frac{1}{7}(2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 12) = 0$ für $M(m_1 / m_2 / m_3)$ gilt daher

$\frac{1}{7}(2m_1 - 3m_2 + 6m_3 - 12) = \pm 3$ und $M \in g = FD \ \Rightarrow$

$\frac{1}{7}(2\cdot(6-3r) - 3\cdot(0+4r) + 6\cdot(4-2r) - 12) = \pm 3 \Leftrightarrow 24 - 30r = \pm 21 \Leftrightarrow r_1 = 0{,}1$ und $r_2 = 1{,}5$

$\overrightarrow{M_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}1\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}7 \\ 0{,}4 \\ 3{,}8 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{M_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 1{,}5\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

also $M_1(5{,}7 / 0{,}4 / 3{,}8)$ und $M_2(1{,}5 / 6 / 1)$ (Hinweis: Nur ein Mittelpunkt ist verlangt!)

2. Ermittle zuerst den Fußpunkt F des Lots von P auf die Ebene E: $\{F\} = g \cap E$ mit

$g: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ also $2\cdot(5+2t) + 1\cdot t - (2-t) + 4 = 0 \Leftrightarrow 12 + 6t = 0 \ \Leftrightarrow \ t = -2$

also $\vec{F} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{FP^*} = \overrightarrow{PF} \Rightarrow \overrightarrow{P^*} = 2\cdot\vec{F} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 2-5 \\ -4-0 \\ 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

d.h. $P^*(-3 / -4 / 6)$