Q12 * Mathematik * Bernoulli-Ketten und Binomialverteilung

Für eine Bernoulli-Kette der Länge n mit dem Parameter p gilt:

$$P_p^n(x=k) = B(n;p;k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad \text{und} \quad P_p^n(x \le k) = \sum_{i=0}^{k} B(n;p;i) \quad (\text{auch } F_p^n(k) \text{ geschrieben})$$

Die Werte von $F_p^n(k) = P_p^n(x \le k) = \sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$ sind für einige wichtige Werte von n und p in den Stochastik-Tabellen angegeben.

Viele Aufgaben lassen sich mit diesen Tabellenwerten sehr schnell ohne großen Rechenaufwand lösen.

Aufgaben:

(Geben Sie bei den folgenden Aufgaben – falls möglich – die Wahrscheinlichkeiten auch als B(n;p;k) bzw. $F_p^n(k)$ an.)

1. Ein idealer Würfel wird 100-mal geworfen.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse?

   a) A = „Genau 20 Mal die 6“ b) B = „Höchstens 20 Mal die 6“
   c) C = „Die Anzahl der 6-er liegt echt zwischen 10 und 20.“
   d) D = „Mehr als 20 Mal die 6“ e) E = „Mindestens 60 Mal eine Zahl größer als 3“
   f) F = „Höchstens 30 Mal eine Zahl kleiner als 3“
   g) G = „Mindestens 85 Mal keine 1“ h) H = „Keine einzige 6“

2. Wie oft muss man einen Würfel werfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens eine „6“ zu erhalten?

3. Hans wirft 100-mal eine Münze.
   Bestimmen Sie für folgende Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten.

   a) A = „Mindestens 45 Mal Kopf“ b) B = „Höchstens 45 Mal Zahl“
   c) C = „Die Anzahl von Kopf liegt echt zwischen 45 und 55“
   d) D = „Genau 50 Mal Kopf“ e) E = „Bei den ersten 10 Würfen nie Kopf“

4. Paul spielt Roulette mit System. Er setzt 1€ auf Schwarz. Wenn er gewinnt kassiert er den gesetzten Euro und zusätzlich einen Euro. Wenn er verliert, dann verdoppelt er den Einsatz.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Peter erst beim 6-ten Spiel gewinnt?
      Wie viel Euro gewinnt Peter dann?
   b) Welchen Betrag muss Paul vorrätig haben, wenn er mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% gewinnen will?

5. Ein elektrisches Gerät enthält 100 Bauteile, die unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% ausfallen. Das Gerät ist unbrauchbar, wenn mehr als 3 dieser Bauteile defekt sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Gerät unbrauchbar?

6. Peter wirft 6 ideale Würfel auf ein Mal. Bestimmen Sie für
   die folgenden Ereignisse die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

   a) A = „Nur gerade Zahlen“ b) B = „Mindestens 2 Mal 6“
   c) C = „Lauter verschiedene Zahlen“ d) D = „Genau eine 3“
   e) E = „Augensumme 35“ f) F = „Augensumme 8“

Q12 * Mathematik * Bernoulli-Ketten und Binomialverteilung * Lösungen

1. a) $P(A) = B(100/\frac{1}{6}/20) = 0{,}06786$ b) $P(B) = P_{1/6}^{100}(X \le 20) = 0{,}84811$

   c) $P(C) = P_{1/6}^{100}(10 < X < 20) = P_{1/6}^{100}(X \le 19) - P_{1/6}^{100}(X \le 10) = 0{,}78025 - 0{,}04270 = 0{,}73755$

   d) $P(D) = P_{1/6}^{100}(X > 20) = 1 - P_{1/6}^{100}(X \le 20) = 1 - 0{,}84811 = 0{,}15189$

   e) $P(E) = P_{0,5}^{100}(X \ge 60) = 1 - P_{0,5}^{100}(X \le 59) = 1 - 0{,}97156 = 0{,}02844$

   f) $P(F) = P_{1/3}^{100}(X \le 30) = 0{,}27655$

   g) $P(G) = P_{5/6}^{100}(X \ge 85) = 1 - P_{5/6}^{100}(X \le 84) = 1 - 0{,}61234 = 0{,}38766$

   h) $P(H) = (\frac{5}{6})^{100} = 1{,}2 \cdot 10^{-8}$

2. $P_{1/6}^{n}(X \ge 1) \ge 95\% \;\Rightarrow\; 1 - P_{1/6}^{n}(X = 0) \ge 95\% \;\Rightarrow\; 1 - (\frac{5}{6})^n \ge 0{,}95 \;\Rightarrow\; 0{,}05 \ge (\frac{5}{6})^n \;\Rightarrow$

   $\ln(0{,}05) \ge \ln((\frac{5}{6})^n) \;\Rightarrow\; \ln(0{,}05) \ge n \cdot \ln(\frac{5}{6}) \;\Rightarrow\; \dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln(\frac{5}{6})} \le n$ (denn $\ln(\frac{5}{6}) < 0$) $\Rightarrow$

   $n \ge 16{,}43....$ also $n \ge 17$

3. a) $P(A) = P_{0,5}^{100}(X \ge 45) = 1 - P_{0,5}^{100}(X \le 44) = 1 - 0{,}13563 = 0{,}86437$

   b) $P(B) = P_{0,5}^{100}(X \le 45) = 0{,}18410$

   c) $P(C) = P_{0,5}^{100}(45 < X < 55) = P_{0,5}^{100}(X \le 54) - P_{0,5}^{100}(X \le 45) = 0{,}81590 - 0{,}18410 = 0{,}63180$

   d) $P(D) = P_{0,5}^{100}(X = 50) = 0{,}07959$

   e) $P(E) = P_{0,5}^{10}(X = 0) = 0{,}5^{10} = 0{,}00098$

4. Beim Roulette gibt es 37 Zahlen (0, 1, 2, … , 36) und davon sind 18 Zahlen schwarz

   a) $P(A) = (\frac{19}{37})^5 \cdot \frac{18}{37} = 0{,}01737$ und Peter gewinnt dabei genau einen Euro,

   denn er hat $(1+2+4+8+16)€ = 31€$ eingezahlt und er erhält $2 \cdot 16€ = 32€$.

   b) $P_{18/37}^{n}(X \ge 1) > 99\% \;\Rightarrow\; 1 - P_{18/37}^{n}(X = 0) > 0{,}99 \;\Rightarrow\; 1 - (\frac{19}{37})^n > 0{,}99 \;\Rightarrow$

   $0{,}01 > (\frac{19}{37})^n \;\Rightarrow\; \ln(0{,}01) > n \cdot \ln(\frac{19}{37}) \;\Rightarrow\; \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(\frac{19}{37})} < n \;\Rightarrow\; n > 6{,}9...$ also $n \ge 7$

   Peter musste also $(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64)€ = (2^8 - 1)€ = 127€$ vorrätig haben.

5. $P_{0,02}^{100}(X > 3) = 1 - P_{0,02}^{100}(X \le 3) = 1 - 0{,}85896 = 0{,}14104$

6. a) $P(A) = P_{0,5}^{6}(X = 6) = 0{,}01563$

   b) $P(B) = P_{1/6}^{6}(X \ge 2) = 1 - P_{1/6}^{6}(X \le 1) = 1 - 0{,}73678 = 0{,}26322$

   c) $P(C) = \dfrac{6!}{6^6} = 0{,}01543$

   d) $P(D) = P_{1/6}^{6}(X = 1) = 0{,}40188$

   e) $35 = 5 \cdot 6 + 5$ (6 Möglichkeiten für Augensumme 35) also $P(E) = \dfrac{6}{6^6} = 0{,}013\%$

   f) $8 = 5 \cdot 1 + 3 = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2$ $(6 + \binom{6}{4} = 21$ Möglichkeiten$)$ also $P(F) = \dfrac{21}{6^6} = 0{,}045\%$